



**ITS**  
Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR - SF 141501

## **PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON**

NAUFAL AULIA ADAM  
NRP 1113100097

Dosen Pembimbing  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya, 2017

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



TUGAS AKHIR - SF 141501

## **PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON**

NAUFAL AULIA ADAM  
NRP 1113100097

Dosen Pembimbing  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

DEPARTEMEN FISIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya, 2017

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



UNDERGRADUATE THESIS - SF 141501

# **THE GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVES FROM NEUTRON STARS**

NAUFAL AULIA ADAM  
NRP 1113100097

Supervisor  
Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

Department of PHYSICS  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya, 2017

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# **PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON**

## **TUGAS AKHIR**

Diajukan Guna Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada  
Bidang Studi Fisika Teori dan Filsafat Alam  
Program Studi S1 Departemen Fisika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

**Naufal Aulia Adam**

NRP: 1113100097

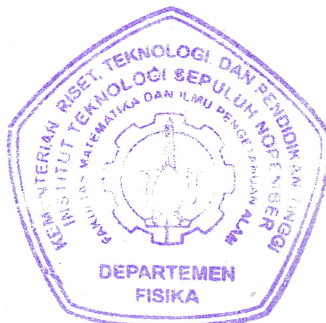
Disetujui oleh Dosen Pembimbing Tugas Akhir :

Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.  
NIP: 197907192005011015

.....  
(Pembimbing 1)

**SURABAYA**

**Juli 2017**



*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## **PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON**

Nama : NAUFAL AULIA ADAM  
NRP : 1113100097  
Departemen : Fisika FMIPA-ITS  
Pembimbing I : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

### **Abstrak**

Dalam laporan tugas akhir ini telah dilakukan kajian analisis mengenai pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron yang bertujuan untuk mengkaji pemodelan matematis mengenai gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh bintang neutron. Kajian analitis ini berawal dari solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi yang menghasilkan teori-teori dasar gelombang gravitasi, seperti polarisasi dan pembangkitan gelombang gravitasi. Pada laporan tugas akhir ini juga akan dibahas mengenai bintang neutron yang merupakan salah satu objek yang memungkinkan untuk dapat menghasilkan gelombang gravitasi yang dapat dideteksi. Hasil akhir pada tugas akhir ini didapat persamaan yang merepresentasikan pemodelan dari pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron.

**Kata-Kunci:** Bintang Neutron, Gelombang Gravitasi, Persamaan medan Einstein, Teori Relativitas Umum.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# **THE GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVES FROM NEUTRON STARS**

Name : NAUFAL AULIA ADAM  
NRP : 1113100097  
Department : Physics FMIPA-ITS  
Supervisor I : Dr.rer.nat. Bintoro Anang Subagyo, M.Si.

## **Abstract**

This undergraduate thesis discusses analytical studies about the generation of gravitational waves from neutron stars. This analytical study begins with the basic theory of gravitational waves involving the general relativity formalism of its propagation and generation. In this undergraduate thesis will also be discussed about the neutron star which is one of the objects that allow to produce detectable gravitational waves. The final part of this undergraduate thesis discusses an equation that represents the modeling of gravitational wave generation by neutron stars.

**Keywords:** Einsten's field equation, General Relativity, Gravitational Waves, Neutron Star.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT karena atas karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON"** dan meraih gelar sarjana pertamanya. Atas bantuan dan dukungan yang diberikan sehingga penulisan tugas akhir ini dapat berjalan dengan baik dan lancar, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Keluarga, terutama kedua orang tua penulis, atas segalanya yang telah diberikan. Terima kasih atas dukungan, bimbingan, doa, nasihat, dan masih banyak hal-hal lain yang telah diberikan, yang tak akan bisa ditulis satu per satu disini. Terima kasih atas semuanya.
2. Bapak Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo, M.Si. sebagai dosen pembimbing penulis, atas bimbingannya dalam membantu penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
3. Bapak Drs. Agus Purwanto, D.Sc. dan Bapak Heru Sukanto, M.Si. sebagai dosen fisika teori ITS, atas bimbingan dan motivasinya terhadap penulis dalam menekuni bidang fisika teori.
4. Bapak Prof. Dr.rer.nat. Agus Rubiyanto, M.Eng.Sc. yang bersedia meluangkan waktunya untuk menguji penulis dalam sidang tugas akhir, serta memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan tugas akhir ini.
5. Bapak Drs. Mochamad Zainuri, M.Si. sebagai dosen wali penulis, atas bimbingan dan nasihatnya selama penulis menjadi mahasiswa S1 Fisika FMIPA-ITS.
6. Dosen, Senior, serta teman-teman Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam ITS (LaFTiFA ITS), atas bantuan, diskusi, serta referensi yang telah diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Seluruh dosen Fisika FMIPA-ITS yang telah memberikan bekal dan tuntunan kepada penulis dengan berbagai pengetahuan selama ini.
8. Karyawan, Laboran, serta semua elemen departemen Fisika FMIPA-ITS, atas fasilitas yang telah diberikan selama penulis menjadi mahasiswa S1 Fisika FMIPA-ITS.
9. Teman-teman Fisika FMIPA-ITS angkatan 2013 (SUPERNOVA 2013), atas pertemanan yang telah dijalani selama penulis menjadi

mahasiswa S1 Fisika FMIPA-ITS. Semoga pertemanan ini akan terus terjalin selamanya.

10. Kakak dan adik tingkat Fisika FMIPA-ITS, sebagai teman seperjuangan dalam menjalani berbagai perkuliahan selama penulis menjadi mahasiswa S1 Fisika FMIPA-ITS.
11. Teman-teman Unit Kegiatan Mahasiswa ITS Astronomy Club (UKM IAC), atas pengalamannya dalam membangun organisasi, sekaligus menjadi wadah penulis untuk menyalurkan minatnya di bidang astronomi.
12. Teman-teman Lembaga Dakwah Jurusan Forum Studi Islam Fisika ITS (LDJ FOSIF ITS), atas pengalamannya dalam membangun organisasi, sekaligus menjadi wadah penulis untuk mempelajari dan mengamalkan nilai-nilai dari ajaran agama islam.
13. Semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Akhir kata, penulis memohon maaf bila terdapat kesalahan dan kekurangan dalam penulisan tugas akhir ini. Oleh karena itu, segala bentuk kritik dan saran yang sifatnya membangun pada tugas akhir ini akan diterima dengan tangan terbuka dengan harapan semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan khususnya bidang Fisika Teori dan Astrofisika. Satu harapan penulis semoga tugas akhir ini bukanlah karya pertama dan terakhir dari penulis tetapi suatu langkah awal untuk menghasilkan karya-karya yang lebih baik di masa depan.

Surabaya, Juli 2017

Penulis

# DAFTAR ISI

<b>ABSTRAK</b>	<b>ix</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xi</b>
<b>Kata Pengantar</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xix</b>
<b>I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Metode Penelitian . . . . .	2
1.5 Sistematika Penulisan . . . . .	2
<b>II TEORI RELATIVITAS UMUM</b>	<b>5</b>
2.1 Prinsip Teori Relativitas Umum . . . . .	5
2.2 Persamaan Medan Einstein . . . . .	7
<b>III TEORI DASAR GELOMBANG GRAVITASI</b>	<b>9</b>
3.1 Persamaan Medan Gravitasi Lemah . . . . .	9
3.2 Transformasi Lorentz . . . . .	10
3.3 Transformasi <i>gauge</i> . . . . .	12
3.4 Linearisasi Persamaan Medan Einstein . . . . .	14
3.5 <i>Transverse-Traceless gauge</i> . . . . .	21
3.6 Deviasi Geodesik . . . . .	31
3.7 Polarisasi Gelombang Gravitasi . . . . .	32
3.8 Pembangkitan Gelombang Gravitasi . . . . .	42
3.9 Persamaan Kuadropol . . . . .	45

<b>IV PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON</b>	<b>51</b>
4.1 Gelombang Gravitasi pada Bintang Berotasi . . . . .	51
4.2 Bintang Neutron . . . . .	57
4.3 Detektor Gelombang Gravitasi . . . . .	59
<b>V DISKUSI</b>	<b>63</b>
5.1 Analisa dan Pembahasan . . . . .	63
5.2 Kesimpulan . . . . .	70
5.3 Saran . . . . .	71
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>73</b>
<b>A LAMPIRAN</b>	<b>75</b>
1.1 Persamaan Geodesik . . . . .	75
1.2 Persamaan Medan Einstein . . . . .	80
1.3 Teori Dasar Gelombang Gravitasi . . . . .	87
1.3.1 Persamaan Simbol Cristoffel dan Tensor Kurvatur Riemann pada Medan Gravitasi Lemah . . . . .	87
1.3.2 <i>Lorentz gauge</i> pada Medan Gravitasi Lemah . . . . .	89
1.3.3 Persamaan Tensor dan Skalar Ricci pada Medan Gravitasi Lemah . . . . .	91
1.3.4 Linearisasi Persamaan Medan Einstein . . . . .	94
1.3.5 Persamaan Deviasi Geodesik . . . . .	95
1.3.6 Polarisasi Gelombang Gravitasi . . . . .	100
1.3.7 Pembangkitan Gelombang Gravitasi . . . . .	111
1.3.8 Persamaan Kuadropol . . . . .	115
1.4 Pembangkitan Gelombang Gravitasi pada Bintang Neutron	120
1.4.1 Momen Inersia Elips . . . . .	120
1.4.2 Gelombang Gravitasi pada Bintang Berotasi . . . . .	123
<b>BIODATA PENULIS</b>	<b>131</b>



## DAFTAR GAMBAR

3.1	Kerucut cahaya ( <i>Light cone</i> ) . . . . .	23
3.2	Polarisasi Gelombang Gravitasi <i>plus</i> (+) . . . . .	39
3.3	Polarisasi Gelombang Gravitasi <i>cross</i> ( $\times$ ) . . . . .	41
4.1	Skema Objek Elips yang berotasi pada sumbu- $z$ . . . . .	55
4.2	Skema alat detektor gelombang gravitasi . . . . .	60

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR TABEL

5.1	Spesifikasi detektor gelombang gravitasi VIRGO . . . . .	68
5.2	Data amplitudo gelombang gravitasi $h_0$ pada pulsar . . . . .	69
5.3	Data amplitudo gelombang gravitasi $h_0$ pada pulsar dengan pendekatan eliptistias maksimum $\epsilon_{max}$ dan amplitudo minimum terdeteksi $h_{0min} \approx 10^{-26}$ . . . . .	70

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori relativitas umum merupakan salah satu teori fisika mengenai gravitasi yang diperkenalkan oleh Einstein pada tahun 1915-1916. Teori ini merupakan penggabungan antara teori Einstein sebelumnya, yaitu relativitas khusus dengan teori gravitasi Newton. Menurut Einstein, ruang dan waktu bukanlah dua hal yang dapat dipisahkan, melainkan sesuatu hal yang merupakan kesatuan. Oleh karena itu, ruang dan waktu dapat disebut sebagai ruang-waktu (*spacetime*). Gravitasi yang selama ini dipercaya sebagai suatu gaya, menurut Einstein adalah suatu bentuk kelengkungan pada ruang-waktu yang dihasilkan oleh distribusi massa suatu materi pada ruang-waktu tersebut. Hubungan ini digambarkan dalam persamaan medan Einstein [5].

Jika materi yang bermassa ini bergerak pada ruang-waktu, maka kelengkungan ruang-waktu tersebut akan berubah. Perubahan ini dapat dianalogikan sebagai riak air yang terjadi jika sebuah batu dilemparkan ke permukaan suatu kolam. Saat batu mengenai permukaan air, maka air yang berada di sekitar batu tersebut akan terganggu, menghasilkan riak air dan menyebar ke sekeliling tempat tersebut. Penyebaran riak ini bisa dianalogikan sebagai sebuah gelombang. Pada kasus relativitas umum, materi bermassa yang bergerak pada ruang-waktu akan menghasilkan riak pada ruang-waktu itu sendiri. Penyebaran riak ini bergerak dengan kecepatan cahaya. Karena penyebaran riak bisa dianalogikan sebagai sebuah gelombang, maka pada kasus relativitas umum ini riak tersebut biasa disebut sebagai gelombang gravitasi [11].

Bila ditinjau secara fisis, gelombang gravitasi membawa energi yang besarnya menentukan kuat lemahnya sumber pancaran atau radiasi dan juga menentukan seberapa jauh jarak yang telah ditempuh oleh gelombang gravitasi tersebut. Kuat lemahnya pancaran atau radiasi dari gelombang gravitasi dipengaruhi oleh massa dan kecepatan rotasi dari suatu materi sumber pemancarnya. Selain itu, amplitudo dari suatu gelombang gravitasi akan berkurang seiring dengan jarak yang telah ditempuhnya. Hal ini yang menyebabkan sulitnya mendeteksi gelombang gravitasi dari bumi, mengingat jarak antara bumi dengan obyek-obyek bermassa besar yang memungkinkan menghasilkan

gelombang gravitasi dengan energi yang memungkinkan untuk dideteksi sangat jauh. Di alam semesta ini terdapat berbagai sumber gelombang gravitasi. Beberapa diantaranya adalah sistem bintang ganda, ledakan supernova, tumbukan antara dua lubang hitam, inflasi alam semesta, dan bintang neutron [8]. Bintang neutron yang merupakan salah satu sumber gelombang gravitasi adalah suatu jenis bintang padat dengan rotasi yang cepat yang dihasilkan dari keruntuhan gravitasi pada sebuah bintang yang berukuran besar setelah terjadi supernova. Pada tugas akhir ini, akan dikaji pembangkitan gelombang gravitasi yang berasal dari bintang neutron.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Rumusan masalah tugas akhir ini adalah bagaimana mendapatkan pemodelan matematis mengenai gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh bintang neutron.

## **1.3 Tujuan**

Tujuan yang ingin dicapai pada tugas akhir ini adalah untuk mengkaji pemodelan matematis mengenai gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh bintang neutron.

## **1.4 Metode Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah metode analitis dari studi literatur, yakni dilakukan pengkajian ulang teori serta perhitungan ulang rumus mengenai pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron berdasarkan literatur yang disadur.

## **1.5 Sistematika Penulisan**

Dalam penulisan tugas akhir ini, terdiri dari lima bab. Pada bab I akan diuraikan secara singkat mengenai gelombang gravitasi yang merupakan implikasi dari teori relativitas umum Einstein. Pada bab II akan diuraikan mengenai prinsip teori relativitas umum Einstein beserta persamaan medan Einstein. Pada bab III akan diturunkan solusi

persamaan medan Einstein terlinearisasi dan pengaruhnya terhadap gelombang gravitasi. Pada bab IV akan diturunkan solusi persamaan untuk pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang berotasi beserta sedikit penjelasan mengenai bintang neutron dan detektor gelombang gravitasi. Bab V adalah diskusi mengenai gelombang gravitasi pada bintang neutron, serta kesimpulan tugas akhir dan saran untuk penelitian selanjutnya. Lampiran berisi penurunan rumus secara detail.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## **BAB II**

### **TEORI RELATIVITAS UMUM**

#### **2.1 Prinsip Teori Relativitas Umum**

Sebelum teori Relativitas Umum (TRU) diperkenalkan oleh Einstein pada tahun 1915, dikenal sedikitnya tiga hukum gerak, yaitu mekanika Newton, relativitas khusus, dan gravitasi Newton. Mekanika Newton sangat berhasil dalam menerangkan sifat gerak benda berkecepatan rendah. Namun mekanika ini gagal untuk benda yang kelanjutannya mendekati laju cahaya. Di samping itu, transformasi Galilei yang merupakan transformasi yang dipakai pada mekanika Newton gagal apabila diterapkan pada hukum-hukum seperti persamaan Maxwell yang sifatnya menjadi tidak kovarian di dalam kerangka inersial. Kekurangan ini ditutupi oleh Einstein dengan mengemukakan Teori Relativitas Khusus (TRK). Teori ini dibangun di atas dua asas [1], yaitu:

1. Semua hukum fisika memiliki bentuk yang tetap (kovarian) di dalam sebarang kerangka inersial.
2. Kelajuan cahaya di dalam ruang hampa bernilai tetap (invarian) dan tidak bergantung pada gerak sumber maupun pengamat.

Teori Relativitas Khusus Einstein berhasil menerangkan fenomena benda saat melaju mendekati laju cahaya. Di samping itu, TRK juga berhasil merumuskan kekovarianan persamaan Maxwell di sembarang kerangka inersial dengan menggunakan transformasi Lorentz sebagai pengganti transformasi Galilei. Teori ini juga lebih lengkap daripada mekanika Newton, karena untuk gerak dengan kelajuan rendah, mekanika relativistik tereduksi menjadi mekanika Newton. Salah satu implikasi teori ini adalah ungkapan tidak ada benda atau sinyal yang dapat bergerak lebih cepat daripada cahaya.

Pada titik ini, muncul permasalahan baru. Hukum gravitasi Newton berhasil menerangkan fenomena gerak benda-benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antar benda-benda tersebut dengan ketelitian tinggi. Namun sayangnya, hukum ini tidak konsisten dengan TRK. Jika sebuah benda digerakkan maka gaya gravitasi benda tersebut terhadap benda lain akan berubah dalam sekejap, atau terjadi aksi spontan. Dengan kata lain, efek gravitasi haruslah merambat dengan

kelajuan tak hingga, sesuatu yang bertentangan dengan TRK. Einstein berkali-kali mencoba merumuskan teori gravitasi yang konsisten/kompatibel dengan Teori Relativitas Khusus. Upayanya di tahun 1915 menghasilkan Teori Relativitas Umum (TRU). Ia mengemukakan saran yang cukup revolusioner bahwa gravitasi bukanlah seperti gaya-gaya yang lain, namun gravitasi merupakan efek dari kelengkungan ruang-waktu karena adanya penyebaran massa dan energi di dalam ruang-waktu tersebut. Teori Relativitas Umum ini dibangun di atas dua asas [1], yaitu:

1. **Asas kesetaraan**, yang berbunyi: *"Tidak ada percobaan yang dapat dilakukan dalam daerah kecil (lokal) yang dapat membedakan medan gravitasi dengan sistem dipercepat yang setara"*
2. **Asas kovariansi**, yang berbunyi: *"Hukum alam memiliki bentuk yang tetap terhadap sembarang pemilihan transformasi koordinat"*

Salah satu implikasi asas kesetaraan adalah kesamaan massa inersia dan massa gravitasi. Ketika Newton merumuskan hukum gerak dan hukum gravitasinya, ia mendefinisikan massa inersial dan massa gravitasi. Massa inersial diukur berdasarkan ukuran kelembaman suatu benda terhadap gaya dorong atau gaya tarik yang bekerja, sedangkan massa gravitasi diukur berdasarkan pengaruh gaya gravitasi pada benda tersebut. Para eksperimentalis sejak zaman Newton hingga pertengahan abad ke-20 telah berusaha membuktikan kesetaraan antara kedua jenis massa tersebut. Salah satu percobaan yang paling terkenal adalah percobaan Eotvos yang membuktikan bahwa kedua massa tersebut setara. Berdasarkan bukti eksperimen tersebut, akhirnya Einstein menyimpulkan dalam postulatnya yang terkenal dengan nama Prinsip Ekuivalensi Massa bahwa *"Gaya gravitasi dan gaya inersial yang bekerja pada 1 benda adalah sama dan tidak terbedakan satu sama lain"*. Konsekuensinya adalah bahwa tidak ada lagi kerangka acuan inersial [3].

Akibat prinsip ekuivalensi massa yang menyebabkan tidak adanya kerangka acuan inersial, maka prinsip relativitas khusus menyatakan bahwa hukum-hukum fisika berlaku sama pada kerangka acuan inersial tidaklah berlaku umum. Oleh karena itu, Einstein merumuskan postulat keduanya yang terkenal dengan nama asas kovariansi yang menyatakan bahwa *"Hukum alam memiliki bentuk yang tetap terhadap sembarang*

*pemilihan transformasi koordinat*”. Konsekuensinya adalah setiap besaran fisika haruslah dinyatakan dalam bentuk umum dan tidak bergantung pada koordinat dimana ia didefinisikan. Ini berarti semua besaran fisika harus dinyatakan dalam bentuk tensor. Seperti telah dinyatakan sebelumnya dalam relativitas khusus, hukum-hukum gerak dinyatakan dalam bentuk yang invarian terhadap transformasi Lorentz dengan konsekuensi diperkenalkannya konsep ruang dan waktu dimensi 4 dengan metrik Minkowski. Generalisasinya, teori relativitas umum menyatakan bahwa hukum-hukum fisika harus invarian terhadap transformasi umum dengan konsep ruang-waktu 4 dimensi [3].

## 2.2 Persamaan Medan Einstein

Persamaan Medan Einstein adalah persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua yang menyatakan bahwa gravitasi merupakan suatu kelengkungan pada ruang-waktu yang disebabkan oleh distribusi materi [5]. Bentuk kelengkungan ruang waktu ini digambarkan sebagai bentuk tensor metrik. Tensor metrik ini dipengaruhi oleh distribusi massa sebagai sumber gravitasi, yang berarti merupakan sumber dari kelengkungan ruang-waktu itu sendiri. Persamaan medan Einstein dapat diturunkan dari aksi dengan menerapkan prinsip variasi [9]. Bermula dari persamaan integral aksi total yang disebabkan dari aksi massa sumber dan aksi oleh gravitasi yang dinyatakan sebagai

$$I = I_G + I_M, \quad (2.1)$$

dimana  $I_G$  merupakan aksi oleh medan gravitasi pada ruang vakum dan  $I_M$  merupakan aksi oleh massa sumber. Untuk mendapatkan persamaan gerak, dilakukan variasi terhadap (2.1) dengan prinsip aksi minimum

$$\delta I = 0, \quad (2.2)$$

sehingga persamaan (2.1) akan menjadi

$$\delta I = \delta I_G + \delta I_M$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta I_G + \delta I_M \\ -\delta I_M &= \delta I_G, \end{aligned} \quad (2.3)$$

dengan

$$-\delta I_M = -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega \quad (2.4)$$

dan

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (2.5)$$

dimana  $c$  merupakan kecepatan cahaya,  $G$  merupakan konstanta gravitasi Newton,  $R_{\mu\nu}$  dan  $R$  merupakan tensor kelengkungan Ricci dan skalar Ricci,  $g_{\mu\nu}$  merupakan tensor metrik, dan  $T_{\mu\nu}$  merupakan tensor momentum-energi dari materi. Berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5), maka persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{aligned} -\delta I_M &= \delta I_G \\ -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\Omega &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \sqrt{-g} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Solusi dari persamaan (2.6) adalah

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

dimana persamaan (2.7) disebut sebagai **persamaan medan Einstein** (Penurunan lebih lanjut akan dibahas pada lampiran (1.2)). Ruas kiri pada persamaan (2.7) yang terdapat tensor ruang-waktu  $g_{\mu\nu}$ , tensor Riemann  $R_{\mu\nu}$ , dan skalar Riemann  $R$  menggambarkan kelengkungan ruang-waktu sedangkan ruas kanan yang terdapat tensor energi-momentum  $T_{\mu\nu}$  menggambarkan distribusi materi [6].

# BAB III

## TEORI DASAR GELOMBANG GRAVITASI

### 3.1 Persamaan Medan Gravitasi Lemah

Persamaan Medan Einstein merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear orde dua yang memberikan uraian tentang rumitnya interaksi gravitasi. Namun Einstein menyadari bahwa persamaan ini secara intrinsik mengandung fenomena gelombang. Fenomena gelombang ini dapat diketahui jika persamaan medan Einstein dilinearisasi dengan pendekatan medan gravitasi lemah. Pendekatan medan gravitasi lemah dapat diasumsikan bahwa lemahnya medan gravitasi dapat dinyatakan sebagai metrik ruang-waktu  $g_{\mu\nu}$  dengan menguraikannya sebagai metrik ruang-waktu datar Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  ditambahkan dengan metrik perturbasi  $h_{\mu\nu}$ . Pendekatan medan gravitasi lemah ini dapat ditulis dalam bentuk persamaan [5]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.1)$$

Metrik Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  pada persamaan (3.1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Pendekatan medan gravitasi lemah ini memakai ruang-waktu datar Minkowski karena ruang-waktu tersebut tidak memiliki kelengkungan (datar), yang berarti bahwa ruang-waktu tersebut tidak memiliki medan gravitasi. Komponen  $h_{\mu\nu}$  digunakan untuk memberi "gangguan" atau kelengkungan berupa medan gravitasi pada ruang-waktu Minkowski, dimana diberikan kondisi  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  yang berguna untuk membatasi medan gravitasi tersebut sebagai medan yang lemah. Persamaan (3.1) bisa juga ditulis menjadi

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3.3)$$

dimana  $\varepsilon$  merupakan parameter kecil dari teori gangguan yang mewakili tensor perturbasi  $h_{\mu\nu}$ .

Persamaan (3.1) mempunyai sistem yang invarian terhadap dua jenis transformasi koordinat. Invarian bermakna bahwa persamaan tersebut akan memiliki nilai yang tetap jika ditransformasikan pada transformasi tertentu di sembarang koordinat. Transformasi yang invarian terhadap persamaan (3.1) adalah **transformasi Lorentz** dan **transformasi gauge** [8].

### 3.2 Transformasi Lorentz

Gelombang gravitasi merupakan salah satu fenomena mengenai relativitas umum, dimana relativitas umum itu sendiri merupakan generalisasi dari relativitas khusus. Relativitas khusus ini hanya berlaku pada kerangka acuan inersial, yaitu pilihan kerangka acuan yang bergerak dengan kecepatan konstan. Pemilihan kerangka acuan ini dapat berawal dari kerangka acuan  $S$ , yang diberikan oleh koordinat

$$S = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (3.4)$$

dan ditransformasikan ke kerangka acuan  $S'$ , yang diberikan oleh koordinat

$$S' = (x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (ct', x', y', z'), \quad (3.5)$$

dimana kecepatan vektor pada kerangka  $S$  dapat dinyatakan sebagai

$$v_i = (v_1, v_2, v_3) = (v_x, v_y, v_z). \quad (3.6)$$

Transformasi antar kerangka acuan tersebut dikenal sebagai **transformasi Lorentz**. Sebagai contoh, jika terdapat kecepatan  $v$  yang relatif terhadap sumbu- $x$  ( $\vec{v} = v_x \hat{i}$ ), maka matriks dari transformasi Lorentz dapat ditulis sebagai

$$(ct', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct, x, y, z)^T, \quad (3.7)$$

dimana

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{dan} \quad \beta_x = \frac{v_x}{c}.$$

Sedangkan untuk sumbu- $y$ , transformasi Lorentz dalam bentuk matriksnya adalah

$$(ct', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta_y \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y \gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct, x, y, z)^T, \quad (3.8)$$

dan pada sumbu- $z$

$$(ct', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta_z \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} (ct, x, y, z)^T. \quad (3.9)$$

Matriks (3.7), (3.8), (3.9) dapat disederhanakan dalam bentuk persamaan dengan dituliskan dalam notasi tensor

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^{\nu} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu}, \quad (3.10)$$

dengan kondisi indeks  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

Matriks transformasi Lorentz juga mempunyai invers. Jika terdapat kecepatan  $v$  yang relatif terhadap sumbu- $x$ , maka invers matriks tersebut adalah

$$(ct, x, y, z)^T = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_x \gamma & 0 & 0 \\ \beta_x \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct', x', y', z')^T, \quad (3.11)$$

dimana invers matriks tersebut juga dapat dituliskan dalam bentuk

persamaan dengan notasi tensor

$$x^\mu = \Lambda_{\nu'}^\mu x^{\nu'} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} x^{\nu'}. \quad (3.12)$$

Bila persamaan medan gravitasi lemah ditransformasikan dengan transformasi Lorentz (3.10), didapat

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha'}^\mu \Lambda_{\beta'}^\nu g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

dimana jika mengingat kembali persamaan (3.3), maka persamaan tersebut dapat disubstitusikan dengan persamaan (3.13) dan menghasilkan

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} h_{\mu\nu} \right) \\ &= \eta'_{\alpha\beta} + \varepsilon h'_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Metrik Minkowski bersifat invarian terhadap transformasi Lorentz,

$$\eta'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

sehingga persamaan (3.14) dapat dinyatakan

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h'_{\alpha\beta}. \quad (3.16)$$

Persamaan (3.14) menunjukkan bentuk yang sama dengan persamaan (3.3), sehingga terbukti bahwa transformasi Lorentz merupakan transformasi yang invarian terhadap persamaan medan gravitasi lemah.

### 3.3 Transformasi *gauge*

Transformasi *gauge* didapatkan dari transformasi infinitesimal atau transformasi koordinat kecil, yaitu transformasi yang disebabkan perpindahan kecil terhadap skalar, vektor, ataupun tensor rank dua [9]

$$x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu \quad |\xi^\mu| \ll 1, \quad (3.17)$$

dimana  $\xi^\mu$  merupakan komponen perpindahan kecil terhadap  $x^\mu$ .



Persamaan (3.17) juga dapat ditulis sebagai

$$x^{\mu'} = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.18)$$

dimana  $\varepsilon$  merupakan parameter kecil dari suku perpindahan yang mewakili  $\xi^\mu$ . Bentuk persamaan (3.18) dapat diubah sebagai

$$x^\mu = x^{\mu'} - \varepsilon \xi^\mu \quad (3.19)$$

dan bila persamaan (3.19) diturunkan secara parsial, maka persamaan tersebut dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} &= \delta_{\alpha'}^{\mu'} - \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \\ &= \delta_{\alpha'}^{\mu'} - \varepsilon \partial_{\alpha'} \xi^\mu. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Jika mengingat kembali persamaan (3.13), maka persamaan tersebut dapat disubstitusikan dengan persamaan (3.20) dan menghasilkan

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} \\ &= \left( \delta_{\alpha'}^{\mu'} - \varepsilon \partial_{\alpha'} \xi^\mu \right) \left( \delta_{\beta'}^{\nu'} - \varepsilon \partial_{\beta'} \xi^\nu \right) g_{\mu\nu} \\ &= \delta_{\alpha'}^{\mu'} \delta_{\beta'}^{\nu'} g_{\mu\nu} - \varepsilon \partial_{\alpha'} \xi^\mu \delta_{\beta'}^{\nu'} g_{\mu\nu} - \delta_{\alpha'}^{\mu'} \varepsilon \partial_{\beta'} \xi^\nu g_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \partial_{\alpha'} \xi^\mu \partial_{\beta'} \xi^\nu g_{\mu\nu} \\ &= g_{\alpha\beta} - \varepsilon \partial_{\alpha} \xi^\mu g_{\mu\beta} - \varepsilon \partial_{\beta} \xi^\nu g_{\alpha\nu} + O(\varepsilon^2) \\ &= g_{\alpha\beta} - \varepsilon \partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \varepsilon \partial_{\beta} \xi_{\alpha} + O(\varepsilon^2) \\ &= g_{\alpha\beta} - \varepsilon \partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \varepsilon \partial_{\beta} \xi_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

dimana  $\varepsilon$  merupakan parameter yang memiliki nilai yang sangat kecil ( $\varepsilon \ll 1$ ) sehingga nilai  $\varepsilon^2 \approx 0$  dan dapat diabaikan.

Komponen  $g_{\alpha\beta}$  pada persamaan (3.21) dapat disubstitusikan dengan persamaan (3.3) sehingga menjadi

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon h_{\alpha\beta} - \varepsilon (\partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \partial_{\beta} \xi_{\alpha}) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \varepsilon (h_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} \xi_{\beta} - \partial_{\beta} \xi_{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) dapat pula disubstitusikan kembali dengan persamaan (3.14), sehingga didapat

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi^\beta - \partial_\beta \xi^\alpha \quad (3.23)$$

dimana persamaan (3.23) dikenal sebagai **transformasi gauge**. Persamaan (3.23) juga dapat ditulis menjadi

$$h_{\alpha\beta}^{(new)} = h_{\alpha\beta}^{(old)} - \partial_\alpha \xi^\beta - \partial_\beta \xi^\alpha. \quad (3.24)$$

Persamaan ini disebut sebagai ”*gauge*” karena saat dilakukan pemilihan suatu koordinat  $x^\mu$  pada ruang-waktu seperti pada persamaan (3.18), maka sebenarnya telah dilakukan juga pemilihan *gauge*. Dengan kata lain, koordinat  $x^\mu$  merupakan *gauge*-nya, dimana pada persamaan medan gravitasi lemah maka  $h_{\alpha\beta}$  merupakan *gauge*-nya. Perlu diingat kembali bahwa komponen  $\xi^\mu$  dari persamaan (3.18) hingga persamaan (3.24) merupakan komponen perpindahan kecil, sehingga komponen tersebut juga memiliki nilai yang kecil. Hal ini menyebabkan hampir tidak adanya perubahan fisis yang dihasilkan oleh transformasi *gauge* terhadap medan gravitasi lemah, oleh karena itu dapat dikatakan bahwa transformasi *gauge* bersifat invarian terhadap medan gravitasi lemah.

### 3.4 Linearisasi Persamaan Medan Einstein

Persamaan Medan Einstein dapat dilinearisasi dengan menggunakan keadaan-keadaan yang terdapat pada persamaan medan gravitasi lemah, transformasi Lorentz, dan transformasi *gauge*. Diberikan persamaan simbol Christoffel sebagai

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}). \quad (3.25)$$

Pada medan gravitasi lemah, persamaan simbol Christoffel bertransformasi sebagai

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}) (\partial_\gamma (\eta_{\sigma\beta} + h_{\sigma\beta}) \\ &\quad + \partial_\beta (\eta_{\gamma\sigma} + h_{\gamma\sigma}) - \partial_\sigma (\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mengingat kembali bahwa nilai  $h^{\alpha\sigma}$  pada medan gravitasi lemah sangatlah kecil ( $h^{\alpha\sigma} \ll 1$ ) dan turunan parsial dari metrik minkowski  $\partial_\gamma \eta_{\sigma\beta} = 0$ , maka persamaan (3.26) menjadi

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} (\partial_\gamma h_{\sigma\beta} + \partial_\beta h_{\gamma\sigma} - \partial_\sigma h_{\beta\gamma}). \quad (3.27)$$

Dari persamaan (3.27) akan didapatkan persamaan tensor kurvatur Riemann. Hubungan persamaan tensor kurvatur Riemann dengan simbol Christoffel adalah

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma. \quad (3.28)$$

Mengingat bahwa tensor metrik bersifat simetrik, maka didapat pula bahwa simbol Christoffel juga bersifat simetrik. Berdasarkan hal ini, persamaan (3.28) menjadi

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha. \quad (3.29)$$

Jika persamaan (3.27) disubstitusikan dengan persamaan (3.29), maka didapat

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} (\partial_\mu (\partial_\nu h_{\sigma\beta} + \partial_\beta h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma h_{\beta\nu}) \\ &\quad - \partial_\nu (\partial_\mu h_{\sigma\beta} + \partial_\beta h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\beta\mu})). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana, persamaan (3.30) dapat ditulis

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\alpha - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h_\mu^\alpha + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\beta\mu}). \quad (3.31)$$

Persamaan (3.31) merupakan persamaan **tensor kurvatur Riemann** untuk medan gravitasi lemah (Untuk penurunan lebih lanjut dapat dilihat pada lampiran (1.3.1)).

Setelah mendapatkan persamaan tensor kurvatur Riemann, maka langkah selanjutnya adalah mendapatkan tensor Ricci. Hubungan persamaan mengenai tensor kurvatur Riemann dengan tensor Ricci

adalah

$$R_{\beta\nu} = R_{\beta\mu\nu}^{\mu}. \quad (3.32)$$

Berdasarkan persamaan (3.32), persamaan tensor Ricci didapatkan bila indeks  $\alpha$  dan  $\mu$  pada persamaan tensor kurvatur Riemann (3.31) dikontraksikan, sehingga didapat

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\mu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\mu}^{\mu} + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\beta\mu}). \quad (3.33)$$

Persamaan (3.33) dapat disederhanakan dengan operator d'Alembert  $\square$ , dengan didefinisikan sebagai

$$\eta^{\sigma\mu}\partial_{\mu}\partial_{\sigma} \equiv \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = \square, \quad (3.34)$$

dan skalar metrik perturbasi

$$\eta^{\sigma\mu}h_{\mu\sigma} = h_{\alpha}^{\alpha} = h. \quad (3.35)$$

Dengan menggunakan operator d'Alembert  $\square$  dan skalar metrik perturbasi  $h$ , persamaan (3.33) menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\mu} - \square h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h + \partial_{\nu}\partial^{\mu}h_{\beta\mu}). \quad (3.36)$$

Pada titik ini, persamaan (3.36) dapat diubah menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_{\beta} \left( \partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}h \right) + \partial_{\nu} \left( \partial^{\mu}h_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\partial_{\beta}h \right) - \square h_{\beta\nu} \right), \quad (3.37)$$

dan diperkenalkan *trace-reversed perturbation*, suatu metrik perturbasi

dengan bentuk persamaan

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.38)$$

Persamaan (3.37) dapat disederhanakan jika ditinjau beberapa komponennya dan ditransformasikan ke dalam bentuk *trace-reversed perturbation*, seperti

$$\begin{aligned} \partial_\beta \left( \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu h \right) &= \partial_\beta \partial_\mu \left( h_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu h \right) \\ &= \partial_\beta \partial_\mu (\bar{h}_\nu^\mu) \\ &= \partial_\beta \partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Hal ini juga berlaku dengan komponen  $\partial_\nu (\partial^\mu h_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\partial_\beta h)$ , sehingga persamaan (3.37) menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu + \partial_\nu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\mu} - \square h_{\beta\nu}). \quad (3.40)$$

Telah diketahui bahwa persamaan medan gravitasi lemah bersifat invarian terhadap transformasi *gauge*. Transformasi *gauge* merupakan suatu transformasi yang dapat menyederhanakan suatu sistem apabila sistem tersebut invarian terhadapnya dengan dilakukan pemilihan *gauge* pada sistem tersebut. Berdasarkan hal ini, persamaan medan Einstein dapat disederhanakan dengan transformasi *gauge* melalui pendekatan medan gravitasi lemah. Dilakukan pemilihan *gauge* untuk metrik perturbasi, dengan meninjau ulang persamaan (3.38)

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\ &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

dan persamaan (3.24)

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\nu \xi^\mu - \partial_\mu \xi^\nu \\ &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$h_{\mu\nu}^{(old)}$  merupakan metrik perturbasi pada keadaan awal yang didefinisikan berada pada ruang-waktu minkowski, sedangkan  $h_{\mu\nu}^{(new)}$  merupakan metrik perturbasi baru yang sudah ditransformasikan dan memenuhi syarat-syarat *gauge* untuk menyederhanakan persamaan (3.40). Dari persamaan (3.41) dan (3.42), didapat persamaan baru yaitu

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} (\partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\gamma + \eta_{\mu\gamma} \partial_\alpha \xi^\alpha). \quad (3.43)$$

Jika kedua ruas pada persamaan (3.43) dikalikan dengan  $\partial_\nu$ , maka akan didapat

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} \partial_\nu \partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha, \quad (3.44)$$

dan bila diasumsikan indeks  $\alpha = \nu$  pada persamaan (3.44), maka didapat

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \square \xi_\mu. \quad (3.45)$$

Persamaan (3.45) akan menentukan pemilihan *gauge*. Untuk menyederhanakan persamaan medan Einstein sesederhana mungkin, dipilih

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = 0, \quad (3.46)$$

sehingga

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} = \square \xi_\mu. \quad (3.47)$$

Persamaan (3.46) ini yang merupakan persamaan *gauge* disebut sebagai **Lorentz gauge** (Penurunan lebih lanjut terdapat pada lampiran (1.3.2)). Berdasarkan persamaan (3.46), persamaan (3.40) menjadi

$$R_{\beta\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu}. \quad (3.48)$$

Selain tensor Ricci, untuk membangun persamaan medan Einstein terlinearisasi juga dibutuhkan skalar Ricci  $R$ . Skalar Ricci  $R$  dapat dibangun dengan

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}. \quad (3.49)$$

Pada kasus medan gravitasi lemah, skalar Ricci  $R$  dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned} R &= (\eta^{\beta\nu} + h^{\beta\nu}) R_{\beta\nu} \\ &= \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} + h^{\beta\nu} R_{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Mengingat bahwa  $h^{\beta\nu} \ll 1$ , maka

$$\begin{aligned} R &= \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \\ &= \eta^{\beta\nu} \left( -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \square \eta^{\beta\nu} h_{\beta\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \square h. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Persamaan (3.48) dan (3.51) merupakan persamaan **tensor dan skalar Ricci** pada medan gravitasi lemah (Penurunan lebih lanjut terdapat pada lampiran (1.3.3)). Setelah mendapatkan tensor Ricci dan skalar Ricci, maka persamaan medan Einstein (2.7) dapat dibangun menjadi persamaan medan Einstein terlinearisasi. Persamaan medan Einstein terlinearisasi dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\beta\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\beta\nu} \\ \square \bar{h}_{\beta\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mengingat bahwa operator d'Alembert dapat ditulis sebagai

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.53)$$

maka persamaan (3.52) dapat ditulis

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{h}_{\beta\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2} T_{\beta\nu}. \quad (3.54)$$

Persamaan(3.52) dan (3.54) merupakan **persamaan medan Einstein terlinearisasi**. Pada medan vakum, nilai tensor momentum-energi  $T_{\beta\nu} = 0$ , sehingga persamaan medan Einstein terlinearisasi untuk medan vakum adalah

$$\square \bar{h}_{\beta\nu} = 0. \quad (3.55)$$

Operator d'Alembert juga dapat ditransformasikan menjadi

$$\begin{aligned} \square &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \\ &= k^2 + \nabla^2, \end{aligned} \quad (3.56)$$

dimana  $\nabla^2$  merupakan simbol dari operator Laplace. Persamaan (3.55) dapat dirumuskan ulang menjadi

$$(k^2 + \nabla^2) \bar{h}_{\beta\nu} = 0. \quad (3.57)$$

Solusi dari persamaan (3.57) adalah

$$\bar{h}_{\beta\nu} = A_{\beta\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}. \quad (3.58)$$

Persamaan (3.58) yang merupakan solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi untuk medan gravitasi lemah ini merepresentasikan persamaan gelombang datar, dimana komponen  $A_{\beta\nu}$  merepresentasikan amplitudo gelombang dan  $k_\sigma$  merepresentasikan vektor gelombang.



### 3.5 *Transverse-Traceless gauge*

Komponen  $A_{\beta\nu}$  pada persamaan medan Einstein terlinearisasi merupakan tensor metrik yang dapat dirumuskan sebagai matriks  $4 \times 4$

$$A_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

dimana tensor metrik  $A_{\beta\nu}$  memiliki 16 komponen bebas. Namun diketahui bahwa  $A_{\beta\nu}$  merupakan tensor yang simetrik,

$$A_{\beta\nu} = A_{\nu\beta}, \quad (3.60)$$

sehingga didapat 6 komponen simetrik, yaitu

$$\begin{aligned} A_{01} &= A_{10}, \\ A_{02} &= A_{20}, \\ A_{03} &= A_{30}, \\ A_{12} &= A_{21}, \\ A_{13} &= A_{31}, \\ A_{23} &= A_{32}, \end{aligned}$$

dan komponen bebas pada  $A_{\beta\nu}$  tereduksi menjadi 10 komponen. Komponen-komponen bebas tersebut masih dapat direduksi kembali dengan meninjau ulang kembali solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi dan *Lorentz gauge* pada persamaan medan Einstein terlinearisasi.

Solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi juga dapat digunakan untuk menentukan sifat gelombang gravitasi. Jika persamaan (3.55) dan (3.58) dimasukkan kembali ke persamaan (3.57), maka akan

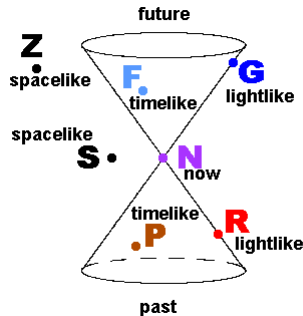
didapat

$$\begin{aligned}
 \square \bar{h}_{\beta\nu} &= \eta^{\rho\mu} \partial_\rho \partial_\mu \bar{h}_{\beta\nu} = 0 \\
 &= \eta^{\rho\mu} \partial_\rho \partial_\mu \left( A_{\beta\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) = 0 \\
 &= \eta^{\rho\mu} \partial_\rho (ik_\mu) \left( A_{\beta\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) = 0 \\
 &= \eta^{\rho\mu} (ik_\rho) (ik_\mu) \left( A_{\beta\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) = 0 \\
 &= -\eta^{\rho\mu} k_\rho k_\mu \left( A_{\beta\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \right) = 0 \\
 &= -k_\rho k^\rho \bar{h}_{\beta\nu} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Tidak semua komponen  $\bar{h}_{\beta\nu} = 0$ , sehingga didapat

$$k_\rho k^\rho = 0. \tag{3.62}$$

Dari persamaan (3.62), dapat diketahui bahwa vektor gelombang  $k_\sigma$  merupakan *null vector* atau vektor nol. Vektor nol adalah suatu unsur dalam suatu ruang vektor yang mempunyai besaran "nol". Vektor nol ditulis dalam koordinat sebagai  $(0, 0, 0)$ , dan biasanya diberi lambang  $\vec{0}$ . Pada kerucut cahaya (*light cone*) dari ruang-waktu Minkowski, vektor ini juga bisa disebut sebagai vektor *lightlike* [10]. Vektor *lightlike* merupakan vektor yang bersinggungan dengan garis diagonal atau garis dunia (*worldline*) pada kerucut cahaya.



**Gambar 3.1** Kerucut cahaya (*Light cone*)

Kerucut cahaya (*Light cone*) merupakan visualisasi mengenai hubungan antara peristiwa yang terjadi pada ruang-waktu. Penjelasan mengenai kerucut cahaya adalah sebagai berikut:

1. Titik tengah pada kerucut cahaya merupakan peristiwa yang terjadi pada suatu objek saat ini.
2. Kerucut bagian atas pada kerucut cahaya merupakan peristiwa yang terjadi di masa depan yang dipengaruhi oleh peristiwa yang terjadi saat ini.
3. Kerucut bagian bawah pada kerucut cahaya merupakan peristiwa yang terjadi di masa lalu yang mempengaruhi peristiwa yang terjadi saat ini.
4. Bagian dalam kerucut yang disebut *timelike* merupakan daerah dimana suatu objek yang memiliki kecepatan lebih kecil dibandingkan kecepatan cahaya ( $v \ll c$ ) mengalami suatu peristiwa, baik masa lalu, masa kini, ataupun masa depan.
5. Bagian luar kerucut yang disebut *spacelike* merupakan daerah yang tidak mempengaruhi peristiwa apapun pada suatu objek yang berada pada daerah *timelike*.
6. Garis diagonal atau garis dunia (*worldline*) pada kerucut cahaya yang disebut *lightlike* merupakan "batas" kecepatan suatu objek terhadap ruang-waktu yang ada. Hal ini dikarenakan dalam teori relativitas, tidak ada objek yang lebih cepat melebihi kecepatan cahaya. Sehingga komponen *lightlike* pada kerucut cahaya ini juga merepresentasikan cahaya itu sendiri.

Pada kerucut cahaya, kecepatan suatu objek digambarkan dengan sebuah garis lurus vertikal. Semakin besar kecepatan suatu objek, maka semakin dekat kecepatan objek tersebut dengan kecepatan cahaya, yang merupakan kecepatan "maksimum" yang diperbolehkan menurut teori relativitas. Hal ini menyebabkan posisi garis yang menggambarkan kecepatan objek tersebut semakin miring, mendekati kemiringan garis dunia *lightlike*. Telah diketahui pula sebelumnya bahwa vektor gelombang yang dihasilkan melalui solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi merupakan vektor nol, vektor yang bersinggungan dengan garis dunia *lightlike*. Berdasarkan hal ini, dapat disimpulkan bahwa gelombang gravitasi juga merambat dengan kecepatan cahaya.

Komponen vektor  $k_\sigma$  dapat dijabarkan menjadi

$$k_\sigma = \left( \frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3 \right), \quad (3.63)$$

dengan komponen  $k^1$ ,  $k^2$ , dan  $k^3$  merupakan komponen vektor koordinat ruang. Bila nilai  $c \equiv 1$ , maka persamaan (3.63) dapat ditulis sebagai

$$k_\sigma = (\omega, k^1, k^2, k^3). \quad (3.64)$$

Dengan mengetahui karakteristik vektor gelombang  $k_\sigma$ , maka dapat direduksi kembali komponen bebas pada  $A_{\beta\nu}$  menggunakan persamaan *Lorentz gauge* (3.46),

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0 \\ &= ik^\mu A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = 0 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

dan persamaan (3.65) dapat disederhanakan menjadi

$$k^\mu A_{\mu\nu} = 0. \quad (3.66)$$

Berdasarkan persamaan (3.66), maka dapat diketahui bahwa vektor gelombang  $k^\mu$  harus bersifat ortogonal atau tegak lurus terhadap  $A_{\mu\nu}$ , dan komponen bebas pada  $A_{\mu\nu}$  dapat direduksi menjadi 6 komponen.

Komponen-komponen bebas ini masih dapat direduksi kembali. Berdasarkan persamaan transformasi koordinat, dapat didefinisikan persamaan transformasi koordinat yang baru

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \zeta^{\mu}. \quad (3.67)$$

Dengan pendekatan medan gravitasi lemah dan transformasi *trace-reversed perturbation*, maka persamaan (3.67) dapat dirumuskan sebagai

$$\partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = \partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \square \zeta_{\mu}. \quad (3.68)$$

Persamaan (3.68) ini mirip dengan persamaan (3.45). Dengan mempertahankan kondisi (3.46), maka didapat

$$\partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} = \square \zeta_{\mu}. \quad (3.69)$$

Untuk mereduksi komponen  $A_{\mu\nu}$ , diperlukan

$$\square \zeta_{\mu} = 0, \quad (3.70)$$

sehingga

$$\partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = \partial_{\nu} \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} = \square \zeta_{\mu} = 0. \quad (3.71)$$

Mengingat persamaan (3.55) dan (3.57), dapat diketahui bahwa  $\square \zeta_{\mu}$  juga merupakan persamaan gelombang dengan solusi

$$\square \zeta_{\mu} = B_{\mu} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}}. \quad (3.72)$$

Persamaan 3.72 dapat disubstitusikan ke persamaan transformasi *gauge* dengan pendekatan medan gravitasi lemah dan *trace-reversed perturbation*, sehingga didapat

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(new)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(new)} \\ &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_{\mu} \zeta_{\nu} - \partial_{\nu} \zeta_{\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( h^{(old)} - 2 \partial_{\lambda} \zeta^{\lambda} \right) \\ &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(old)} - \partial_{\mu} \zeta_{\nu} - \partial_{\nu} \zeta_{\mu} + \eta_{\mu\nu} \partial_{\lambda} \zeta^{\lambda} \end{aligned}$$

$$= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \zeta^\lambda. \quad (3.73)$$

Dengan memakai solusi persamaan medan Einstein (3.58), didapat

$$A_{\mu\nu}^{(new)} = A_{\mu\nu}^{(old)} - ik_\mu B_\nu - ik_\nu B_\mu + i\eta_{\mu\nu} k_\lambda B^\lambda. \quad (3.74)$$

Persamaan (3.74) ini dapat mereduksikan komponen bebas pada  $A_{\mu\nu}$  hingga menjadi 2 komponen saja, dengan syarat

$$A_\mu^{\mu(new)} = 0, \quad (3.75)$$

dan

$$A_{0\nu}^{(new)} = 0. \quad (3.76)$$

Persamaan (3.75) menunjukkan bahwa  $A_{\mu\nu}$  bersifat *traceless*, yang berarti jumlah nilai total pada diagonal utama matriksnya sama dengan nol. Pada persamaan (3.74) dapat diketahui bahwa untuk dapat memenuhi syarat (3.75) dan (3.76), maka komponen  $B_\mu$  harus bernilai sedemikian rupa hingga memenuhi persyaratan tersebut. Jika diberikan syarat (3.75), maka akan didapat

$$0 = A_\mu^{\mu(old)} + 2ik_\lambda B^\lambda, \quad (3.77)$$

atau

$$k_\lambda B^\lambda = -\frac{i}{2} A_\mu^{\mu(old)}. \quad (3.78)$$

Kemudian diberikan syarat (3.76) untuk  $\nu = 0$ , didapat

$$\begin{aligned} 0 &= A_{00}^{(old)} - 2ik_0 B_0 - ik_\lambda B^\lambda \\ 0 &= A_{00}^{(old)} - 2ik_0 B_0 + \frac{1}{2} A_\mu^{\mu(old)}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

atau

$$B_0 = -\frac{i}{2k_0} \left( A_{00}^{(old)} + \frac{1}{2} A_\mu^{\mu(old)} \right). \quad (3.80)$$

Untuk  $\nu = \nu$ , didapat

$$\begin{aligned} 0 &= A_{\mu\nu}^{(old)} - ik_0 B_\nu - ik_\nu B_0 \\ 0 &= A_{\mu\nu}^{(old)} - ik_0 B_\nu - ik_\nu \left[ -\frac{i}{2k_0} \left( A_{00}^{(old)} + \frac{1}{2} A_\mu^{\mu(old)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.81)$$

atau

$$B_\nu = \frac{i}{2(k_0)^2} \left[ -2k_0 A_{0\nu}^{(old)} + k_\nu \left( A_{00}^{(old)} + \frac{1}{2} A_\mu^{\mu(old)} \right) \right]. \quad (3.82)$$

Persamaan (3.78), (3.80), dan (3.82) merupakan syarat yang harus dipenuhi komponen  $B_\mu$  untuk memenuhi persyaratan dari persamaan (3.75) dan (3.76). Syarat pada (3.76) juga dapat ditinjau pada kerangka Lorentz, dengan ditulis sebagai

$$A_{\mu\nu}^{(new)} U^\mu = 0. \quad (3.83)$$

$U^\mu$  yang merupakan vektor kecepatan-4 *timelike* konstan dapat ditulis juga sebagai

$$U^\mu = \delta_i^\mu, \quad (3.84)$$

dimana  $i$  merupakan indeks untuk komponen vektor pada vektor kecepatan-4 *timelike*  $U^\mu$  yang ingin ditinjau. Pada persamaan (3.76), vektor kecepatan-4 *timelike*  $U^\mu$  digambarkan sebagai vektor kecepatan-4 *timelike* pada kerangka transformasi Lorentz untuk objek atau partikel uji yang diam dengan komponen  $(1, 0, 0, 0)$ . Vektor kecepatan-4 *timelike*  $U^\mu$  dapat ditulis sebagai persamaan tensor

$$U^\mu = \delta_0^\mu, \quad (3.85)$$

dan menghasilkan persamaan (3.76). Jika ditinjau gelombang bergerak

dengan menjalar ke salah satu arah koordinat vektor ruang (misalkan arah- $z$ ), maka

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega),$$

sehingga persamaan  $U^\mu$  dapat ditulis sebagai

$$U^\mu = \delta_3^\mu, \quad (3.86)$$

dan didapat persamaan

$$A_{3\nu} = 0. \quad (3.87)$$

Dalam pemisalan ini, dapat ditinjau ulang mengenai komponen bebas yang tereduksi pada  $A_{\mu\nu}$ . Berawal dari 16 komponen, dengan menggunakan syarat persamaan (3.66), (3.76), dan (3.87), maka komponen tersebut berkurang menjadi 4 komponen

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Mengingat bahwa  $A_{\mu\nu}$  merupakan tensor metrik simetrik, dan pada persamaan (3.75) didapat pula bahwa  $A_{\mu\nu}$  *traceless*, maka komponen bebas tersebut berkurang menjadi 2 komponen

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Persamaan (3.66), (3.75), dan (3.83) merupakan persamaan *Transverse-Traceless gauge* [11]. Penamaan *gauge* ini berasal dari persamaan (3.66) yang mentransformasikan komponen  $A_{\mu\nu}$  menjadi tegak lurus (*transverse*) terhadap vektor gelombang  $k^\mu$  dan persamaan (3.83) yang juga mentransformasikan komponen  $A_{\mu\nu}$  tegak lurus



terhadap vektor kecepatan-4  $U^\mu$  pada kerangka Lorentz. Sedangkan pada persamaan (3.75), komponen  $A_{\mu\nu}$  bersifat *traceless*, yang berarti bahwa jumlah nilai total pada diagonal utama matriksnya sama dengan nol.

Jika persamaan *trace-reversed perturbation* (3.38) disederhanakan, maka akan didapat

$$\begin{aligned}\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\ \bar{h} &= h - 2h \\ \bar{h} &= -h.\end{aligned}\tag{3.90}$$

Persamaan (3.90) ini menyatakan hubungan nilai *trace* dari  $\bar{h}$  dan  $h$ . Berdasarkan persamaan *gauge* (3.75), diketahui bahwa nilai *trace* dari  $A_{\mu\nu} = 0$ . Hal ini juga mempengaruhi nilai *trace* dari  $\bar{h}$ , sehingga didapat

$$\begin{aligned}\bar{h} &= -h = 0 \\ \bar{h} &= h = 0.\end{aligned}\tag{3.91}$$

Persamaan (3.91) ini menyatakan bahwa pada keadaan *gauge* (3.75), nilai *trace* dari  $\bar{h} = h$ , sehingga persamaan (3.91) juga dapat ditulis

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)},\tag{3.92}$$

dimana label  $(TT)$  pada persamaan (3.82) menyatakan bahwa  $\bar{h}_{\mu\nu}$  dan  $h_{\mu\nu}$  berada dalam *Transverse-Traceless gauge*.

Perlu diketahui bahwa 2 komponen bebas yang tersisa pada solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi akan menyatakan arah getar atau polarisasi dari gelombang gravitasi. Hal ini akan dibahas pada subbab (3.7).

Jika diberikan suatu komponen gelombang bidang dengan *gauge* sembarang, maka komponen gelombang tersebut dapat dialihkan ke dalam komponen *Transverse-Traceless gauge*. Didefinisikan operator yang memproyeksikan vektor ke suatu bidang yang tegak lurus terhadap arah suatu vektor normal  $\mathbf{n}$

$$P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k, \quad (3.93)$$

dimana operator  $P_{jk}$  bersifat layaknya tensor operator,

$$P_{jk} P_{kl} = P_{jl}, \quad (3.94)$$

bersifat simetrik,

$$P_{jk} = P_{kj}, \quad (3.95)$$

dan juga bersifat *transverse*, atau tegak lurus terhadap  $n^k$

$$P_{jk} n^k = 0. \quad (3.96)$$

Didefinisikan proyektor *Transverse-Traceless*

$$\mathcal{P}_{jkmn} \equiv P_{jm} P_{kn} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{mn}, \quad (3.97)$$

dimana sifat dari operator  $P_{jk}$  ini juga dimiliki oleh proyektor  $\mathcal{P}_{jkmn}$ , yaitu simetrik,

$$\mathcal{P}_{jkmn} = \mathcal{P}_{mnjk}, \quad (3.98)$$

tensor operator,

$$\mathcal{P}_{jkmn} \mathcal{P}_{mnrs} = \mathcal{P}_{jkr s}, \quad (3.99)$$

*transverse*,

$$n^j \mathcal{P}_{jkmn} = 0, \quad (3.100)$$

dan *traceless*,

$$\delta^{jk} \mathcal{P}_{jkmn} = 0. \quad (3.101)$$

Berdasarkan sifat-sifat ini, maka bila suatu sistem tidak berada dalam kondisi *Transverse-Traceless gauge*, maka sistem tersebut dapat dialihkan ke dalam kondisi *Transverse-Traceless gauge* dengan menggunakan proyektor *Transverse-Traceless gauge*. Jika ditinjau dalam kasus metrik perturbasi  $h_{\mu\nu}$  pada persamaan medan Einstein terlinearisasi, maka didapat persamaan

$$\bar{h}_{jk}^{(TT)} = h_{jk}^{(TT)} = \mathcal{P}_{jkmn} h_{mn} = \mathcal{P}_{jkmn} \bar{h}_{mn}. \quad (3.102)$$

### 3.6 Deviasi Geodesik

Gelombang gravitasi dapat mengakibatkan adanya penyimpangan atau deviasi pada jarak terdekat suatu titik ke titik yang lain (geodesik) pada ruang-waktu. Dari persamaan geodesik (Penurunan terdapat pada lampiran (1.1))

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0, \quad (3.103)$$

dapat dilakukan prinsip variasi untuk mendapatkan persamaan deviasi geodesik. Berawal dengan memakai transformasi infinitesimal/transformasi koordinat kecil, persamaan geodesik dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{d^2 (x^a + \epsilon^a)}{ds^2} + \Gamma_{bc}^{a'} \frac{d(x^b + \epsilon^b)}{ds} \frac{d(x^c + \epsilon^c)}{ds} = 0. \quad (3.104)$$

Komponen  $\Gamma_{bc}^{a'}$  pada persamaan (3.104) merupakan simbol Christoffel  $\Gamma_{bc}^a$  yang mengandung  $\epsilon$ , dan dapat diekspansikan serta diambil dua suku

utamanya

$$\Gamma_{bc}^{a'} = \Gamma_{bc}^a + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d + \dots \quad (3.105)$$

sehingga persamaan (3.104) dapat diekspansikan menjadi

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} \\ & + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Kemudian dilakukan pengurangan terhadap persamaan (3.106) dengan (3.103), dan didapatkan

$$\frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0. \quad (3.107)$$

Diaplikasikan prinsip turunan kovarian pada persamaan (3.107),

$$\frac{DA^a}{Dx^b} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma_{bc}^a A^c, \quad (3.108)$$

sehingga didapat

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Ds^2} = -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c. \quad (3.109)$$

Persamaan (3.109) ini merupakan **persamaan deviasi geodesik** (Penurunan terdapat pada lampiran (1.1)).

### 3.7 Polarisasi Gelombang Gravitasi

Deviasi geodesik yang dihasilkan oleh gelombang gravitasi akan menunjukkan polarisasi atau arah getar dari gelombang gravitasi itu sendiri, dimana 2 komponen bebas pada solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi akan menunjukkan 2 jenis polarisasi pada gelombang gravitasi. Dari persamaan deviasi geodesik (3.109)

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Ds^2} = -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c,$$

dapat diturunkan persamaan polarisasi gelombang gravitasi. Komponen  $ds$  pada persamaan deviasi geodesik merupakan elemen garis pada ruang-waktu yang ditinjau (Dalam hal ini ditinjau ruang-waktu Minkowski) dan  $\epsilon^a$  merupakan vektor yang menghubungkan kedua objek atau partikel uji. Jika hal ini ditinjau pada objek atau partikel uji dalam keadaan diam, maka persamaan deviasi geodesik tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Dt^2} = -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^d}{dt} \epsilon^c, \quad (3.110)$$

dimana komponen  $s \equiv x^0 \equiv t$  dan  $\epsilon^a$  mempunyai komponen  $(0, \varepsilon, 0, 0)$ . Persamaan 3.110 dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Dt^2} = -R_{bcd}^a U^b U^d \epsilon^c, \quad (3.111)$$

dimana  $U^b$  yang merupakan vektor kecepatan-4 *timelike* pada kedua partikel. Pada kasus partikel uji dalam keadaan diam, vektor kecepatan-4 *timelike*  $U^b$  memiliki komponen  $(1, 0, 0, 0)$ . Persamaan (3.111) juga dapat disederhanakan sebagai

$$\frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} = -R_{0c0}^a U^0 U^0 \epsilon^c, \quad (3.112)$$

dan komponen tensor Riemann pada persamaan (3.112) dapat dijabarkan menjadi

$$R_{0c0}^a = \frac{1}{2} (\partial_c \partial_0 h_0^a - \partial_0 \partial^a h_{00} - \partial_0 \partial_0 h_c^a + \partial_0 \partial^a h_{0c}). \quad (3.113)$$

Mengingat kembali keadaan *Transverse-Traceless gauge*, maka

komponen  $h_0^a$ ,  $h_{00}$ , dan  $h_{0c}$  pada persamaan (3.113) dapat diabaikan, sehingga persamaan (3.112) menjadi

$$\frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_c^{a(TT)} \epsilon^c. \quad (3.114)$$

Solusi dari persamaan (3.114) adalah

$$\epsilon^a = \left( \delta_{ac} + \frac{1}{2} h_c^{a(TT)} \right) \epsilon_0^c. \quad (3.115)$$

Komponen  $h_c^{a(TT)}$  dapat dijabarkan dengan meninjau ulang solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi,

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} e^{ik_\sigma x^\sigma}.$$

Bila ditinjau gelombang menjalar terhadap sumbu- $z$  pada koordinat kartesian, maka solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} e^{-i\omega(t-z)}. \quad (3.116)$$

Bila persamaan (3.116) diubah ke dalam bentuk trigonometri, maka didapat

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} (\cos(\omega(t-z))). \quad (3.117)$$

Mengingat bahwa  $A_{\beta\nu}^{(TT)}$  memiliki 2 komponen bebas, maka persamaan (3.117) dapat ditulis

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = \left( a A_{11}^{(TT)} + b A_{12}^{(TT)} \right) (\cos(\omega(t-z))). \quad (3.118)$$

Persamaan (3.118) dapat disederhanakan menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = \bar{h}_{11}^{(TT)} + \bar{h}_{12}^{(TT)}, \quad (3.119)$$

dimana

$$\bar{h}_{11}^{(TT)} = a A_{11}^{(TT)} (\cos(\omega(t - z)))$$

dan

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

serta

$$\bar{h}_{12}^{(TT)} = b A_{12}^{(TT)} (\cos(\omega(t - z)))$$

dan

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan (3.115) dapat dibangun bentuk eksplisitnya dengan meninjau arah propagasi gelombang menuju sumbu- $z$  dan persamaan (3.119), sehingga didapat

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x + \frac{1}{2} \left( h_{11}^{(TT)} \epsilon_0^x + h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^y \right), \quad (3.120)$$

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y + \frac{1}{2} \left( h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^x - h_{11}^{(TT)} \epsilon_0^y \right), \quad (3.121)$$

$$\epsilon^z = \epsilon_0^z. \quad (3.122)$$

Komponen  $\epsilon_0^x$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $x$ ,  $\epsilon_0^y$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $y$ , dan  $\epsilon_0^z$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $z$ . Namun karena sebelumnya telah dibahas bahwa hal ini ditinjau pada sumbu- $z$ , maka  $\epsilon_0^z = 0$ . Dengan begitu, persamaan (3.122) dapat diabaikan.

Mengingat bahwa  $A_{\beta\nu}^{(TT)}$  memiliki 2 komponen bebas yang merepresentasikan polarisasi gelombang gravitasi, maka persamaan (3.120) dan (3.121) dapat dipisah menjadi

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (3.123)$$

dan

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (3.124)$$

dimana komponen  $h_{12}^{(TT)} = 0$ , serta

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^y \quad (3.125)$$

dan

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^x \quad (3.126)$$

dimana komponen  $h_{11}^{(TT)} = 0$ . Persamaan (3.123) dan (3.124) merepresentasikan polarisasi gelombang milik komponen  $h_{11}^{(TT)}$ , sedangkan persamaan (3.125) dan (3.126) merepresentasikan polarisasi gelombang milik komponen  $h_{12}^{(TT)}$ .

Pada titik ini, diberikan asumsi bahwa lintasan partikel uji untuk polarisasi gelombang gravitasi sebelum gelombang tersebut datang berbentuk lingkaran pada bidang sumbu- $x$  dan sumbu- $y$  (karena arah gelombang pada sumbu- $z$ ), sehingga dapat didefinisikan  $r_0$  sebagai jari-jari lingkaran tersebut. Dengan asumsi ini, didapat

$$\epsilon_0^x = r_0 \cos \theta \quad (3.127)$$

dan



$$\epsilon_0^y = r_0 \sin \theta. \quad (3.128)$$

Jika persamaan (3.127) dan (3.128) dimasukkan ke persamaan (3.123), (3.124), (3.125), dan (3.126), akan didapat

$$\epsilon^x = r_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (3.129)$$

dan

$$\epsilon^y = r_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (3.130)$$

untuk komponen  $h_{11}^{(TT)}$ , serta

$$\epsilon^x = r_0 \cos \theta + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} r_0 \sin \theta \quad (3.131)$$

dan

$$\epsilon^y = r_0 \sin \theta + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} r_0 \cos \theta \quad (3.132)$$

untuk komponen  $h_{12}^{(TT)}$ . Persamaan (3.129) dan (3.130) dapat disederhanakan menjadi

$$\epsilon^x = \cos \theta \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right) \quad (3.133)$$

dan

$$\epsilon^y = \sin \theta \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right). \quad (3.134)$$

Pada titik ini, diberi pemisalan bahwa

$$a_+ = \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right) \quad (3.135)$$

dan

$$b_+ = \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right), \quad (3.136)$$

sehingga persamaan (3.133) dan (3.134) dapat disederhanakan menjadi

$$\left( \frac{\epsilon^x}{a_+} \right)^2 + \left( \frac{\epsilon^y}{b_+} \right)^2 = 1. \quad (3.137)$$

Persamaan (3.137) merupakan persamaan elips, sehingga hal ini menunjukkan bahwa lintasan partikel uji saat dilewati gelombang gravitasi berubah dari bentuk lingkaran menjadi elips. Persamaan (3.135) dan (3.136) merupakan persamaan baru untuk panjang jari-jari lintasan partikel uji yang berbentuk elips, dan kedua persamaan tersebut dapat ditulis juga sebagai

$$a_+ = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\omega(t-z)) \right) \quad (3.138)$$

dan

$$b_+ = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\omega(t-z)) \right). \quad (3.139)$$

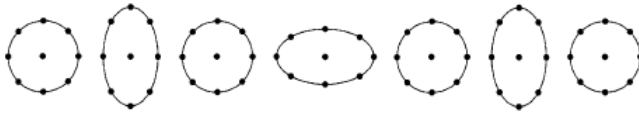
Untuk menyederhanakan persamaan (3.138) dan (3.139) didefinisikan  $\omega(t-z) \equiv \phi$ , sehingga didapat

$$a_+ = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\phi) \right) \quad (3.140)$$

dan

$$b_+ = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\phi) \right). \quad (3.141)$$

Berdasarkan persamaan (3.140) dan (3.141), dapat divariasikan nilai  $(\phi)$  sehingga dapat diketahui polarisasi gelombang gravitasi berbentuk (+) atau bisa disebut sebagai **polarisasi plus**.



**Gambar 3.2** Polarisasi Gelombang Gravitasi *plus* (+) [2]

Dapat diketahui dari gambar (3.2) bahwa keadaan awal lintasan partikel uji berupa lingkaran, sama seperti yang telah dibahas sebelumnya. Mengingat bahwa persamaan (3.140) dan (3.141) merupakan fungsi cosinus, maka pada keadaan awal nilai  $\phi = \frac{\pi}{2}$  dan untuk keadaan selanjutnya nilai  $\phi$  adalah kelipatan  $\frac{\pi}{2}$  ( $\phi = (n+1)\frac{\pi}{2}$ ).

Setelah meninjau komponen (3.129) dan (3.130), maka komponen yang akan ditinjau selanjutnya adalah komponen (3.131) dan (3.132). Sebelum meninjau komponen-komponen tersebut, dapat dilakukan transformasi rotasi terhadap matriks  $a$  pada  $\bar{h}_{11}^{(TT)}$  pada bidang  $x - y$  sehingga menjadi

$$a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bila  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , maka  $a' = b$ . Berdasarkan hal tersebut, diketahui bahwa  $a'$  dan  $b$  terhubung oleh rotasi dengan sudut  $\frac{\pi}{4}$ . Untuk meninjau komponen (3.131) dan (3.132), komponen  $\epsilon^x$  dan  $\epsilon^y$  dapat ditransformasikan ke koordinat baru  $\epsilon^{x'}$  dan  $\epsilon^{y'}$  terlebih dahulu, dengan  $\theta = \frac{\pi}{4}$  sehingga menjadi

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{x'} \\ \epsilon^{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon^{x'} \\ \epsilon^{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix}. \quad (3.142)$$

Berdasarkan matriks (3.7), persamaan (3.131) dan (3.132) dapat ditulis kembali menjadi

$$\epsilon^{x'} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 (\sin \theta + \cos \theta) \left( 1 + h_{12}^{(TT)} \right) \quad (3.143)$$

dan

$$\epsilon^{y'} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 (\sin \theta - \cos \theta) \left( 1 - h_{12}^{(TT)} \right). \quad (3.144)$$

Jika diberi pemisalan yang sama seperti (3.140) dan (3.141), bahwa

$$a_{\times} = \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \right) \right) \quad (3.145)$$

dan

$$b_{\times} = \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \right) \right) \quad (3.146)$$

maka didapat

$$\left( \frac{\epsilon^{x'}}{a_{\times}} \right)^2 + \left( \frac{\epsilon^{y'}}{b_{\times}} \right)^2 = 1. \quad (3.147)$$

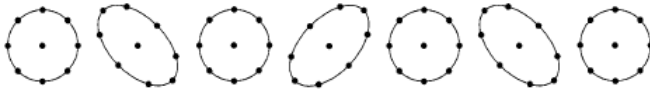
Persamaan (3.147) mirip dengan persamaan (3.137), sehingga persamaan ini juga merupakan persamaan elips. Berdasarkan hal ini, persamaan (3.145) dan (3.146) juga dapat ditulis sebagai

$$a_{\times} = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\phi) \right) \quad (3.148)$$

dan

$$b_{\times} = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\phi) \right). \quad (3.149)$$

Berdasarkan persamaan (3.148) dan (3.149), dapat divariasikan nilai  $(\phi)$  sehingga dapat diketahui polarisasi gelombang gravitasi berbentuk  $(\times)$  atau bisa disebut sebagai **polarisasi cross**.



**Gambar 3.3** Polarisasi Gelombang Gravitasi *cross*  $(\times)$  [2]

Dapat diketahui dari gambar (3.3) bahwa keadaan awal lintasan partikel uji berupa lingkaran, sama seperti pada gambar (3.2). Mengingat bahwa persamaan (3.148) dan (3.149) merupakan fungsi cosinus, maka pada keadaan awal nilai  $\phi = \frac{\pi}{2}$  dan untuk keadaan selanjutnya nilai  $\phi$

adalah kelipatan  $\frac{\pi}{2}$  ( $\phi = (n+1)\frac{\pi}{2}$ ) (Penurunan lengkap persamaan-persamaan pada subbab ini terdapat pada lampiran (1.3.6)).

### 3.8 Pembangkitan Gelombang Gravitasi

Persamaan pembangkitan gelombang gravitasi dapat ditentukan melalui fungsi Green dan transformasi Fourier yang diberikan pada persamaan medan Einstein terlinierisasi. Diberikan persamaan fungsi Green pada operator d'Alembert

$$\square \mathcal{G}(x; x') = -4\pi \delta^3(x - x') \delta(t) \quad (3.150)$$

dimana

$$R = |x - x'|, \quad (3.151)$$

sehingga persamaan (3.150) dapat disederhanakan menjadi

$$\square \mathcal{G}(R, t) = -4\pi \delta^3(R) \delta(t). \quad (3.152)$$

Kemudian, diberikan transformasi Fourier untuk fungsi Green,

$$\mathcal{G}(R, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.153)$$

dan

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.154)$$

sehingga jika persamaan (3.153) dan (3.154) dimasukkan ke dalam persamaan (3.152), akan didapat

$$(\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) = -\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta^3(x - x'). \quad (3.155)$$

Diketahui bahwa

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi \delta^3(x), \quad (3.156)$$

sehingga persamaan (3.155) dapat ditulis menjadi

$$\mathcal{G}_{\pm}(R, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (3.157)$$

Jika kembali ke persamaan (3.153), dengan substitusi yang ada pada persamaan (3.157) didapat

$$\mathcal{G}_{\pm}(R, t) = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t \pm i k R} d\omega. \quad (3.158)$$

Diketahui bahwa  $k = \frac{\omega}{c}$ , sehingga persamaan (3.158) menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\pm}(R, t) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t \mp \frac{R}{c})} d\omega \\ &= \frac{1}{R} \delta\left(t \mp \frac{R}{c}\right). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Komponen  $R$  pada persamaan (3.159) dapat dikembalikan ke bentuk semula seperti pada persamaan (3.151), sehingga didapat

$$\mathcal{G}_{\pm}(x; x') = \frac{1}{|x - x'|} \delta\left(t \mp \frac{|x - x'|}{c}\right). \quad (3.160)$$

Persamaan (3.160) merupakan persamaan yang mengandung dua fungsi Green, yaitu fungsi Green *retarded* ( $\mathcal{G}_+$ ) dan fungsi Green

*advanced* ( $\mathcal{G}_-$ ). Bila ditinjau fungsi Green *retarded*, didapat

$$\mathcal{G}_+(x; x') = \frac{1}{|x - x'|} \delta\left(t - \frac{|x - x'|}{c}\right) \quad (3.161)$$

dimana dalam kasus gelombang, ditinjau fungsi gelombang *retarded* karena fungsi tersebut mewakili penjaralan gelombang yang berjalan dari masa lalu ke masa kini (sekarang). Mengingat kembali persamaan medan Einstein terlinearisasi,

$$\square \bar{h}_{\beta\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu},$$

dengan menganalogikannya sebagai persamaan gelombang dengan distribusi materi seperti pada kasus medan elektromagnetik,

$$\square \Psi = -4\pi f(x'),$$

maka solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi dapat ditemukan dengan mengintegalkannya terhadap fungsi Green. Solusi persamaan gelombang dengan distribusi materi adalah

$$\Psi = \int \mathcal{G}(x; x') f(x') d^3x'. \quad (3.162)$$

Pada kasus medan Einstein terlinearisasi,

$$\Psi = \bar{h}_{\beta\nu}$$

dan

$$\begin{aligned} -4\pi f(x') d^3x' &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}(x') d^3x' \\ f(x') d^3x' &= \frac{4\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}(x') d^3x', \end{aligned}$$



sehingga solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi menurut fungsi Green adalah

$$\bar{h}_{\beta\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\beta\nu}(x', (t - \frac{R}{c}))}{R} d^3x'. \quad (3.163)$$

### 3.9 Persamaan Kuadrupol

Persamaan kuadrupol merupakan persamaan pembangkitan gelombang gravitasi yang menunjukkan bahwa gelombang gravitasi dibangkitkan dengan momen kuadrupol massa yang bergantung pada komponen waktu. Persamaan kuadrupol diturunkan dari solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi menurut fungsi Green

$$\bar{h}_{\beta\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\beta\nu}(x', (t - \frac{R}{c}))}{R} d^3x',$$

dengan asumsi bahwa ruang-waktu yang ditinjau adalah ruang-waktu datar dengan tidak adanya pengaruh gravitasi. Berdasarkan asumsi tersebut, didapat persamaan tensor momentum-energinya

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} &= - \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (3.164)$$

dimana  $\mu = 0, 1, 2, 3$  dan  $k = 1, 2, 3$ . Jika kedua ruas pada persamaan (3.164) diintegalkan terhadap volume dari suatu sumber medan gravitasi, didapat

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} d^3x = - \int_V \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} d^3x. \quad (3.165)$$

Berdasarkan teorema Gauss, integral  $T^{\mu k}$  terhadap volume  $V$  sebanding dengan fluks  $T^{\mu k}$  yang melewati suatu permukaan  $S$  yang menutupi volume tersebut

$$\int_V \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} d^3x = \int_S T^{\mu k} dS_k. \quad (3.166)$$

Namun diketahui bahwa

$$\int_S T^{\mu k} dS_k = 0, \quad (3.167)$$

sehingga persamaan (3.165) menjadi

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} d^3x = 0. \quad (3.168)$$

Berdasarkan persamaan (3.168), didapat bahwa

$$\int_V T^{\mu 0} d^3x = \text{constant},$$

sehingga

$$\bar{h}^{\mu 0} = \text{constant}. \quad (3.169)$$

Mengingat bahwa persamaan kuadropol merupakan persamaan yang berhubungan dengan momen kuadropol massa yang bergantung pada komponen waktu, maka persamaan (1.162) dapat ditulis

$$\bar{h}^{\mu 0}(t, r) = \bar{h}_{\mu 0}(t, r) = 0, \quad (3.170)$$

dimana kondisi ini secara otomatis akan terpenuhi ketika tensor metrik  $\bar{h}^{\mu 0}(t, r)$  bertransformasi ke *Transverse-Traceless gauge*.

Pada titik ini, digunakan teorema Tensor-Virial dengan meninjau kembali persamaan (3.164)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{n0}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{ni}}{\partial x^i}, \quad (3.171)$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan  $x^k$  dan diintegrasikan terhadap volume, didapat

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{n0} x^k d^3x = \int_V T^{nk} dx^3. \quad (3.172)$$

Diketahui bahwa  $T^{nk}$  merupakan tensor simetrik,

$$T^{nk} = T^{kn}$$

sehingga persamaan (3.172) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (T^{n0} x^k + T^{k0} x^n) d^3x = \int_V T^{nk} dx^3. \quad (3.173)$$

Jika diberi kasus komponen  $n = 0$  pada persamaan (3.171), maka

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -\frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i}. \quad (3.174)$$

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (3.174) dengan  $x^k x^n$  dan diintegrasikan terhadap  $V$ , didapat

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x = \int_V (T^{0k} x^n + T^{0n} x^k) d^3x. \quad (3.175)$$

Bila persamaan (3.175) diturunkan terhadap komponen  $x_0$  pada tensor metrik ruang-waktu datar, maka didapat

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (T^{0k} x^n + T^{0n} x^k) d^3x. \quad (3.176)$$

Persamaan (3.176) dapat disubstitusikan dengan persamaan (3.173), sehingga menghasilkan

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x = 2 \int_V T^{kn} d^3x, \quad (3.177)$$

dimana sisi kiri pada persamaan (3.177) merupakan turunan orde dua **tensor momen kuadropol** ( $q^{kn}$ ) terhadap waktu, dimana

$$q^{kn}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x. \quad (3.178)$$

Persamaan (3.176) dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} q^{kn}(t) = \int_V T^{kn} d^3x, \quad (3.179)$$

dan solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi dalam medan menjadi

$$\bar{h}^{ik}(t, R) = \frac{2G}{c^4} \left[ \frac{d^2}{dt^2} q^{ik} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (3.180)$$

Persamaan (3.180) merupakan persamaan pembangkitan gelombang gravitasi dengan formula kuadropol. Mengingat bahwa persamaan (3.180) belum dalam kondisi *Transverse-Traceless gauge*, maka dapat diaplikasikan persamaan proyektor *Transverse-Traceless gauge* (3.102) pada tensor momen kuadropol pada persamaan (3.180), sehingga didapat

$$\bar{h}_{ik}^{(TT)}(t, R) = \frac{2G}{c^4} \left[ \frac{d^2}{dt^2} Q_{ik}^{(TT)} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (3.181)$$

dimana

$$Q_{jk}^{(TT)} = \mathcal{P}_{jkmn} q_{mn}. \quad (3.182)$$

$Q_{jk}$  merupakan momen kuadropol tereduksi dengan bentuk persamaan

$$Q_{jk} \equiv q_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr q, \quad (3.183)$$

dimana *trace* dari  $Q_{jk}$  bernilai nol,

$$\delta^{jk} Q_{jk} = 0,$$

sehingga persamaan (3.182) juga dapat ditulis menjadi

$$Q_{jk}^{(TT)} = \mathcal{P}_{jkmn} q_{mn} = \mathcal{P}_{jkmn} Q_{mn}. \quad (3.184)$$

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB IV

### PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA BINTANG NEUTRON

#### 4.1 Gelombang Gravitasi pada Bintang Berotasi

Bintang neutron merupakan salah satu bintang berotasi yang dapat menghasilkan gelombang gravitasi. Untuk mendapatkan persamaan pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron, maka dapat dilakukan pendekatan dengan memakai pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang berotasi dan menganggap bahwa bintang neutron sebagai benda tegar. Persamaan pembangkitan gelombang gravitasi pada kasus bintang berotasi bisa didapatkan dengan meninjau ulang persamaan tensor momen kuadropol

$$q^{kn}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x,$$

dimana  $T^{00}$  merupakan komponen densitas energi,

$$T^{00} = \rho c^2, \quad (4.1)$$

dan diasumsikan  $c \equiv 1$ , sehingga

$$q^{kn}(t) = \int_V \rho x^k x^n d^3x. \quad (4.2)$$

Jika diambil nilai *trace* dari  $q^{kn}$ , maka berdasarkan persamaan (4.2) akan didapat

$$Tr q = \int_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \quad (4.3)$$

Selain meninjau tensor momen kuadropol, ditinjau kembali tensor momen inersia suatu sistem, dalam hal ini sistem yang ditinjau adalah sistem elips

$$I_{ij} = \int_V \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dx dy dz. \quad (4.4)$$

Jika diungkapkan dalam bentuk matriks, didapat

$$I_{ij} = \int_V \rho \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Persamaan matriks (4.5) dapat disederhanakan sebagai

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Jika persamaan (4.4) dihubungkan dengan (4.2) dan (4.3), maka akan didapat persamaan relasi

$$q_{ij} = -I_{ij} + \delta_{ij} Tr q. \quad (4.7)$$

Sama seperti tensor momen kuadropol  $q^{kn}$ , jika diambil nilai *trace* dari  $I_{ij}$  maka akan didapat

$$\begin{aligned} Tr I &= \int_V \rho (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dx dy dz \\ &= 2 \int_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \end{aligned} \quad (4.8)$$

dimana jika dihubungkan persamaan (4.3) dan (4.8), maka akan didapat

$$Tr I = 2 Tr q. \quad (4.9)$$

Mengingat kembali persamaan tensor momen kuadropol tereduksi



$$Q_{jk} \equiv q_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}Tr q,$$

bila disubstitusikan dengan persamaan (4.7) dan (4.9), maka akan didapat

$$Q_{jk} = -I_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}Tr I. \quad (4.10)$$

Diketahui bahwa  $Tr I = constant$ , sehingga persamaan (4.10) menjadi

$$Q_{jk} = -I_{ij} + constant. \quad (4.11)$$

Bila diberikan pemisalan bahwa terdapat suatu objek elips yang berotasi terhadap salah satu sumbunya, maka dapat ditentukan kerangka koordinat inersianya sebagai

$$x'_i = R_{ij}x_j, \quad (4.12)$$

dimana  $x_i$  merupakan kerangka koordinat awal,  $x'_i$  merupakan kerangka koordinat inersia saat berotasi, dan  $R_{ij}$  merupakan matriks rotasi. Jika sumbu yang dipilih merupakan sumbu- $z$  dengan kecepatan angular  $(0, 0, \Omega)$ , maka matriks rotasi dapat ditulis sebagai

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

atau

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Mengingat kembali persamaan tensor momen inersia (4.6), maka

persamaan (4.12) dapat ditulis sebagai

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}. \quad (4.15)$$

Jika objek elips berotasi terhadap sumbu- $z$  dengan kecepatan angular  $(0, 0, \Omega)$ , maka

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= R_{ik} R_{jl} I_{kl} = (RIR^T)_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos^2 \varphi (I_2 - I_1) & 0 \\ -\sin \varphi \cos^2 \varphi (I_2 - I_1) & I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dengan memakai prinsip trigonometri dan persamaan (4.11), persamaan (4.16) dapat disederhanakan menjadi

$$Q_{ij} = \frac{I_2 - I_1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{constant}. \quad (4.17)$$

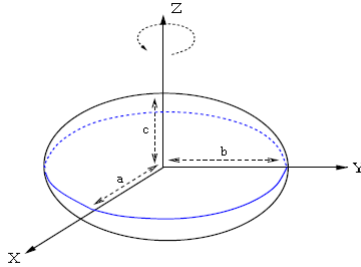
Berdasarkan persamaan (4.17), didapat bahwa nilai  $I_2$  dan  $I_1$  tidak boleh sama, karena hal tersebut akan mengakibatkan nilai  $Q_{ij}$  menjadi konstan, dan itu berarti bahwa tidak ada gelombang gravitasi yang diemisikan. Namun pada kenyataannya, nilai  $I_2$  dan  $I_1$  tidaklah sama. Terdapat selisih kecil antara  $I_2$  dan  $I_1$ , yang dapat didefinisikan sebagai parameter yang tidak berdimensi (*dimensionless*) yang disebut sebagai eliptisitas (*ellipticity*) atau kepepatan (*oblateless*) yang disimbolkan  $\epsilon$ .

Bila ditinjau pada sumbu- $z$  (Lihat gambar (4.1)), parameter eliptisitas  $\epsilon$  didefinisikan sebagai

$$\epsilon \equiv \frac{a - b}{\frac{1}{2}(a + b)}, \quad (4.18)$$

dengan

$$a - b = \frac{1}{2}\epsilon(a + b). \quad (4.19)$$



**Gambar 4.1** Skema Objek Elips yang berotasi pada sumbu- $z$

Persamaan tensor momen inersia pada elips (Penurunan lengkap terdapat pada lampiran(1.4.1)) adalah

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(b^2 + c^2), \\ I_2 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + c^2), \\ I_3 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Persamaan (4.19) dapat diubah bentuk menjadi

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2}. \quad (4.20)$$

Jika persamaan (4.19) dikuadratkan, didapat

$$(a - b)^2 = O(\epsilon^2) = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$2ab = a^2 + b^2 + O(\epsilon^2), \quad (4.21)$$

sehingga persamaan (4.20) menjadi

$$\frac{I_2 - I_1}{I_3} \approx \epsilon. \quad (4.22)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.22), maka persamaan (4.17) menjadi

$$Q_{ij} = \frac{\epsilon I_3}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + constant. \quad (4.23)$$

Berdasarkan penyederhanaan persamaan pada (4.13) dan (4.14), didapat

$$\varphi = \Omega t,$$

dengan

$$\Omega = 2\pi\nu_{rot} = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.24)$$

$\Omega$  merupakan kecepatan angular rotasi objek,  $\nu_{rot}$  merupakan frekuensi rotasi, dan  $T$  merupakan periode rotasi. Namun berdasarkan persamaan (4.23), didapat bahwa besarnya frekuensi gelombang gravitasi dua kali lebih besar dibandingkan dengan frekuensi rotasi bintang

$$\nu_{GW} = 2\nu_{rot}. \quad (4.25)$$

Dengan memakai persamaan (4.23), maka solusi persamaan medan Einstein dengan tensor momen kuadrupol (3.181) dapat disederhanakan menjadi

$$\bar{h}_{ik}^{(TT)}(t, R) = h_0 \left[ \mathcal{P} \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi_{ret} & -\sin 2\varphi_{ret} & 0 \\ -\sin 2\varphi_{ret} & \cos 2\varphi_{ret} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (4.26)$$

dimana

$$\varphi_{ret} = \Omega \left( t - \frac{R}{c} \right) \quad (4.27)$$

dan

$$h_0 = \frac{4G\Omega^2}{c^4 R} I_3 \epsilon. \quad (4.28)$$

$h_0$  merupakan amplitudo regangan gelombang gravitasi yang dihasilkan suatu objek. Pada persamaan (4.28), amplitudo regangan gelombang gravitasi dihasilkan oleh suatu objek berotasi yang berbentuk elips. Berdasarkan persamaan (4.24), maka persamaan (4.28) dapat disederhanakan lagi menjadi

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4 R T^2} I_3 \epsilon \quad (4.29)$$

atau

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G (\nu_{rot})^2}{c^4 R} I_3 \epsilon. \quad (4.30)$$

## 4.2 Bintang Neutron

Ketika terdapat suatu bintang yang memiliki massa sebesar enam sampai empat puluh kali lebih besar dari massa matahari kehabisan energi nuklirnya, maka bintang tersebut akan runtuh terhadap

gravitasinya sendiri dan kemudian meledak dalam supernova. Setelah terjadi supernova, lapisan luar bintang tersebut akan hancur dan meninggalkan inti kecil bintang yang sangat padat. Pengaruh gravitasi yang ada terus menekan material pada dirinya sendiri sedemikian erat sehingga ukurannya mengecil dan massa inti bintang proton dan elektron pada inti bintang tersebut bergabung dan menghasilkan neutron. Hal ini yang menjadi dasar terciptanya bintang neutron. Pada kasus bintang yang lebih kecil dari enam kali massa matahari, maka bintang tersebut akan menjadi katai putih dan untuk bintang dengan massa lebih besar dari empat puluh kali massa matahari maka bintang tersebut akan menjadi lubang hitam [7].

Bintang neutron memiliki massa  $\sim 1.4$  massa matahari dengan ukuran diameter  $\sim 20$  kilometer (12,4 mil). Ukuran dan massa ini cukup jauh dari ukuran dan massa aslinya. Ukuran dan massa yang mengecil ini juga merupakan implikasi dari gaya gravitasi yang bekerja pada bintang tersebut. Bersamaan dengan itu, kecepatan rotasi dari bintang neutron meningkat pesat. Hal ini merupakan implikasi dari hukum kekekalan momentum [7]

$$L = I\omega = mvr = \text{constant}$$

dimana momentum angular suatu sistem  $L$  akan selalu bernilai konstan, sehingga jika terdapat perubahan terhadap salah satu komponennya, maka komponen yang lain akan ikut berubah sedemikian rupa hingga mempertahankan momentum yang selalu konstan. Dalam kasus bintang neutron, massa  $m$  dan jari-jari  $r$  nya berkurang sangat banyak, sehingga kecepatan  $v$  meningkat cukup pesat untuk mempertahankan momentum bintang yang selalu konstan. Pada kasus objek bintang neutron yang berotasi sangat cepat, objek tersebut disebut *pulsar*.

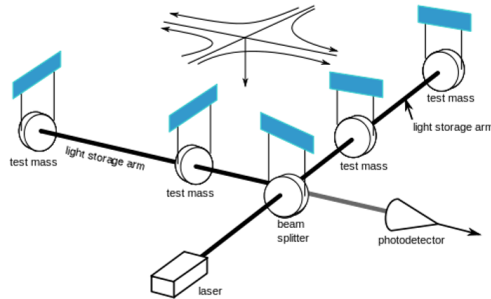
Kecepatan rotasi yang cepat ini membuat bintang neutron merupakan objek yang menarik sebagai sumber gelombang gravitasi. Kecepatan rotasi dari bintang neutron ini akan menghasilkan jenis gelombang gravitasi yang berkelanjutan (*Continuous Gravitational Waves*), selama bintang neutron tersebut masih tetap berotasi.

### 4.3 Detektor Gelombang Gravitasi

Gelombang gravitasi merupakan suatu gelombang yang sangat sulit untuk dideteksi, sehingga para ilmuwan membangun suatu pusat penelitian tersendiri untuk gelombang gravitasi. Salah satunya bernama LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) yang berpusat di Amerika Serikat. LIGO pertama kali beroperasi pada tahun 2002 dan berakhir pada tahun 2010. Namun sejak tahun 2008, penelitian dan pengembangan terbaru telah dilakukan untuk meningkatkan sensitivitasnya.

Pada tanggal 14 September 2015, LIGO yang bekerjasama dengan lembaga penelitian lain berhasil mendeteksi gelombang gravitasi pertama yang dihasilkan oleh penggabungan dua lubang hitam membentuk lubang hitam tunggal yang lebih masif. Proses penggabungan ini dimulai dari dua lubang hitam yang saling mengitari satu sama lain. Semakin lama keduanya akan saling mendekat. Saat jarak semakin kecil, laju keduanya juga semakin cepat dan bergerak saling mendekati satu sama lainnya. Pada proses tersebut ruang waktu di sekitar lubang hitam menjadi terdistorsi dan terpancarlah radiasi berupa gelombang gravitasi. Akhirnya kedua benda langit itu bersatu membentuk lubang hitam tunggal. Pada tahap inilah riak gelombang gravitasi dipancarkan. Setelah itu, gelombang gravitasi pun semakin melemah. Gelombang gravitasi ini diberi nama **GW150914**. Setelah kejadian tersebut, dideteksi kembali gelombang gravitasi pada tanggal 25 Desember 2015 dengan nama **GW151226** dan pada tanggal 04 Januari 2017 dengan nama **GW170104**. Kedua gelombang gravitasi ini juga berasal dari penggabungan dua lubang hitam.

Pada dasarnya detektor gelombang gravitasi adalah sistem interferometer Michelson raksasa yang didukung oleh komponen-komponen tambahan untuk memaksimalkan sensitivitas detektornya. Pada gambar (4.2), tampak dua buah cermin (*input* dan *end mirror*) yang diletakkan saling berjauhan (4 km) satu sama lain dan membentuk lengan interferometer, sedangkan dua buah cermin lainnya (*input* dan *end mirror*) juga diletakkan saling berjauhan (4 km) dan tegak lurus dengan lengan yang pertama. Cermin-cermin ini berguna sebagai pemantul sekaligus penyerap berkas laser yang nantinya akan ditembakkan dari sumber berkas laser yang terdapat pada salah satu ujung lengan interferometer. Komponen yang berada di depan sumber



**Gambar 4.2** Skema alat detektor gelombang gravitasi [5]

berkas laser adalah *beam splitter* yang berguna untuk membagi berkas laser yang datang kepadanya menjadi dua dan di ujung lengan interferometer yang lain terdapat *photodetector* yang berfungsi sebagai penangkap sinyal dari berkas laser.

Cara kerja detektor ini berawal dari berkas laser yang ditembakkan dari sumber berkas laser ke arah *beam splitter*. Setelah melewati *beam splitter*, berkas laser akan terbagi menjadi dua, yang kemudian masing-masing berkas akan menuju lengan yang berbeda. Berkas laser mengalami penyerapan sekaligus pemantulan pada cermin *test mass*, dimana berkas laser yang dipantulkan akan kembali menuju *beam splitter*. Jika kedua lengan interferometer memiliki panjang/jarak yang sama dengan sebelumnya, maka berkas laser yang kembali menuju *beam splitter* yang berasal dari masing-masing lengan akan mengalami interferensi destruktif, sehingga tidak ada berkas laser yang menuju *photodetector*. Sedangkan jika terjadi perbedaan panjang/jarak pada lengan interferometer akibat distorsi ruang yang terjadi ketika gelombang gravitasi melintas (deviasi geodesik yang disebabkan karena polarisasi gelombang gravitasi), maka berkas laser yang kembali menuju *beam splitter* yang berasal dari masing-masing lengan akan mengalami interferensi konstruktif sehingga sebagian dari berkas laser tersebut dapat menuju *photodetector*.

Selain LIGO, terdapat berbagai macam pusat penelitian untuk gelombang gravitasi di negara lain, seperti VIRGO di Italia dan GEO600 di Jerman. Selain itu, sedang dikembangkan pusat penelitian gelombang



gravitasi bernama LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) yang direncanakan akan ditempatkan di luar angkasa. Detektor-detektor ini sebagian besar memiliki prinsip kerja yang sama dengan LIGO, yaitu memiliki prinsip kerja sistem interferometer Michelson.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB V

### DISKUSI

#### 5.1 Analisa dan Pembahasan

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan, maka dapat diketahui bahwa gelombang gravitasi membutuhkan momen kuadropol (atau momen setelahnya, seperti momen oktopol) untuk membangkitkannya. Hal ini berbeda dengan fenomena gelombang elektromagnetik yang membutuhkan momen dipol (atau momen setelahnya, seperti momen kuadropol dan momen oktopol) untuk membangkitkannya. Pembahasan ini dapat ditinjau lebih lanjut dengan memakai analogi sederhana, baik dari segi matematis maupun dari segi fisis.

Bila ditinjau dari segi fisis, maka dapat diketahui bahwa momen dipol pada pembangkitan gelombang elektromagnetik berasal dari dua sumber muatan listrik yang berbeda, yaitu muatan positif dan muatan negatif. Tetapi, analogi seperti ini tidak berlaku untuk gelombang gravitasi. Hal ini dikarenakan sumber utama gelombang gravitasi adalah massa yang tidak memiliki "muatan", sehingga tidak terjadi pembangkitan gelombang gravitasi pada momen dipol. Oleh karena itu, perlu adanya peninjauan secara matematis untuk membahas hal ini lebih lanjut agar dapat memahami dari segi fisisnya.

Radiasi suatu gelombang berasal dari percepatan sumbernya. Pada kasus gelombang elektromagnetik sumbernya adalah muatan listrik  $q$ , sedangkan pada kasus gelombang gravitasi sumbernya adalah massa objek  $m$ . Bila diberikan persamaan radiasi monopol pada keduanya, yaitu persamaan turunan waktu terhadap momen monopolnya, didapat

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} q = 0,$$

dan

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} m = 0.$$

Komponen  $q$  merupakan nilai muatan listrik sekaligus momen monopol pada gelombang elektromagnetik dan komponen  $m$  merupakan nilai

massa objek sekaligus sebagai momen monopol pada gelombang gravitasi. Keduanya bernilai konstan terhadap waktu, sehingga jika diturunkan terhadap waktu maka hasilnya nol. Berdasarkan hal ini, dapat diketahui bahwa momen monopol tidak dapat menghasilkan radiasi gelombang, baik gelombang elektromagnetik maupun gelombang gravitasi.

Setelah meninjau bagian monopol, maka selanjutnya adalah meninjau pada bagian dipolnya. Bila diberikan persamaan radiasi dipol pada momen dipol pada gelombang elektromagnetik, didapat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} p &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (q \cdot x) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (q \cdot \dot{x}) \\
 &= q \cdot \ddot{x} \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} p &\neq 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Sedangkan bila diberikan juga persamaan radiasi dipol pada momen dipol pada gelombang gravitasi, didapat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m \cdot x) &= \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot \dot{x}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (m \cdot v) \\
 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} P \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Komponen  $p$  adalah momen dipol pada gelombang elektromagnetik yang juga merepresentasikan distribusi muatan listrik.  $p$  tidak bernilai konstan

terhadap waktu, sehingga turunan waktunya tidak bernilai nol. Sedangkan komponen  $m \cdot x$  merupakan momen dipol pada gelombang gravitasi yang juga merepresentasikan distribusi massa, dimana turunan pertamanya terhadap waktu tidak bernilai nol dan menghasilkan  $P$  pada persamaan (5.2). Komponen  $P$  sendiri merupakan momentum sistem, yang nilainya konstan karena efek kekekalan momentum. Berdasarkan hal ini, turunan  $P$  terhadap waktu bernilai nol, dan dapat disimpulkan bahwa momen dipol tidak dapat menghasilkan radiasi gelombang gravitasi.

Setelah meninjau bagian dipol, maka langkah terakhir adalah dengan meninjau pada bagian kuadropolnya. Mengingat bahwa momen dipol dapat menghasilkan radiasi gelombang elektromagnetik, maka dapat dipastikan momen kuadropol juga dapat menghasilkan radiasi tersebut. Oleh karena itu, pada bagian kuadropol ini hanya akan ditinjau bagian radiasi gelombang gravitasi. Bila diberikan persamaan radiasi kuadropol pada momen kuadropol massa, yaitu persamaan turunan waktu terhadap momen kuadropolnya, didapat

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (m \cdot x^2) &\approx \frac{\partial^2}{\partial t^2} I \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (2 m \cdot x) \\
 &= (2 m \cdot \dot{x}) \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} I &\neq 0.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Komponen  $I$  merupakan momen kuadropol massa yang juga merupakan momen inersia massa yang merepresentasikan perentangan massa pada suatu sumbu, dimana nilainya tidak bersifat konstan terhadap waktu. Hal ini menyebabkan turunan  $I$  terhadap waktu tidak bernilai nol. Persamaan (5.3) yang merupakan hubungan antara momen kuadropol dengan momen inersia massa ini sebenarnya juga telah dibahas lebih lengkap dengan bentuk eksplisitnya pada subbab (4.1).

Persamaan (4.29) dan (4.30) pada subbab (4.1) merupakan persamaan yang merepresentasikan besar nilai amplitudo regangan

gelombang yang dihasilkan oleh suatu objek berbentuk elips (dalam hal ini objek langit seperti bintang) yang berotasi. Pada kedua persamaan tersebut didapat bahwa massa, frekuensi rotasi/periode rotasi, jarak objek, dan eliptisitas objek merupakan empat hal utama yang mempengaruhi besar nilai amplitudo regangan gelombang gravitasi. Semakin besar nilai massa, frekuensi rotasi objek, dan eliptisitas objek, dan semakin kecil jarak objek ke pengamat dan periode objek, maka semakin besar pula nilai amplitudo gelombang yang dihasilkan.

Berdasarkan empat kriteria tersebut, maka untuk mendapatkan gelombang yang dapat dideteksi oleh pengamat (bumi) haruslah bersumber dari objek-objek yang bermassa sangat besar (melebihi massa Matahari), berotasi dengan cepat, bersifat *non-axisymmetric* atau berbentuk elips gepeng dan tidak berbentuk bola (karena pada objek berbentuk bola, eliptisitasnya bernilai nol), dan memiliki jarak sedekat mungkin dengan bumi. Hal ini dikarenakan massa ataupun rotasi yang dimiliki oleh objek-objek yang berada di dekat bumi tidak cukup besar untuk dapat menghasilkan gelombang gravitasi yang dapat dideteksi oleh pengamat di bumi. Selain itu, objek-objek yang sekiranya "cukup" untuk dapat menghasilkan gelombang yang dapat dideteksi berjarak sangat jauh dari bumi, sehingga dalam perjalanannya, gelombang gravitasi tersebut mengalami banyak interferensi sebelum mencapai bumi. Hal ini yang menyebabkan gelombang gravitasi sangat sulit untuk dideteksi, sehingga dibutuhkan objek-objek bermassa sangat besar dan berotasi sangat cepat hingga gelombang gravitasi yang dihasilkannya dapat dideteksi di bumi.

Berdasarkan pertimbangan-pertimbangan tersebut, maka salah satu objek langit yang berpotensi untuk menghasilkan gelombang gravitasi yang dapat dideteksi adalah bintang neutron. Bintang neutron adalah salah satu objek yang memiliki massa dan kecepatan rotasi yang sangat besar, jauh melebihi Matahari. Jika bintang neutron tersebut berputar sangat cepat dari biasanya, maka bintang neutron tersebut akan disebut sebagai *pulsar*.

Berdasarkan fisiknya, maka pada umumnya bintang neutron dapat dikategorikan sebagai objek langit yang berbentuk elips, seperti kebanyakan objek langit lainnya, sehingga persamaan (4.29) atau (4.30) dapat diaplikasikan. Namun, pada kasus bintang neutron, dapat diberikan beberapa pendekatan berupa jarak bintang neutron dari bumi  $r$  dalam [kpc], periode bintang neutron  $T$  dalam [ms], frekuensi rotasi bintang neutron  $\nu_{rot}$  dalam [kHz], eliptisitas bintang neutron  $\epsilon$  dalam unit  $10^{-6}$ ,

dan nilai momen inersia dari bintang neutron  $I_3 \approx 10^{38} \text{Kg m}^2$ . Berdasarkan pendekatan-pendekatan tersebut, persamaan (4.29) dan (4.30) pada subbab (4.1) akan menjadi [4]

$$h_0 = 4.2 \times 10^{-24} \left[ \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right] \left[ \frac{I_3}{10^{38} \text{Kg m}^2} \right] \left[ \frac{\text{kpc}}{R} \right] \left[ \frac{\text{ms}}{T} \right]^2 \quad (5.4)$$

dan

$$h_0 = 4.2 \times 10^{-24} \left[ \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right] \left[ \frac{I_3}{10^{38} \text{Kg m}^2} \right] \left[ \frac{\text{kpc}}{R} \right] \left[ \frac{\nu_{rot}}{\text{kHz}} \right]^2. \quad (5.5)$$

Sebagai contoh, jika diberikan suatu data mengenai pulsar Vela dengan frekuensi rotasi  $\nu_{rot}$  sebesar 11 Hz, jarak dari bumi  $R$  sebesar 0.5 kpc, dan pendekatan bahwa nilai momen inersia  $I_3 \approx 10^{38} \text{Kg m}^2$  maka dengan memakai persamaan (5.5) nilai amplitudo regangan gelombang gravitasi pada pulsar tersebut adalah

$$\begin{aligned} h_0 &= 4.2 \times 10^{-24} \left[ \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right] \left[ \frac{I_3}{10^{38} \text{Kg m}^2} \right] \left[ \frac{\text{kpc}}{R} \right] \left[ \frac{\nu_{rot}}{\text{kHz}} \right]^2 \\ &= 4.2 \times 10^{-24} \left[ \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right] \left[ \frac{10^{38} \text{Kg m}^2}{10^{38} \text{Kg m}^2} \right] \left[ \frac{\text{kpc}}{0.5 \text{kpc}} \right] \left[ \frac{11 \text{Hz}}{\text{kHz}} \right]^2 \\ &= 1.1 \times 10^{-27} \epsilon_{-6}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

dimana komponen  $\epsilon_{-6}$  merupakan eliptisitas dalam unit  $10^{-6}$ . Berdasarkan hasil perhitungan amplitudo gelombang gravitasi  $h_0$  pada pulsar Vela (5.6), didapat bahwa hal yang sangat mempengaruhi dalam pendeteksian gelombang gravitasi pada bintang neutron (atau lebih spesifiknya pulsar) adalah eliptisitas  $\epsilon$  dari bintang neutron tersebut. Hal ini dikarenakan nilai  $\epsilon$  bergantung pada karakteristik bintang neutronnya masing-masing dan nilainya yang sangat kecil ( $\epsilon \approx 10^{-6}$ ), sehingga membuat nilai amplitudo  $h_0$  juga kecil dan mempersulit pendeteksian gelombang gravitasi tersebut.

Dengan berbagai pendekatan matematis, didapat bahwa nilai

eliptisitas maksimum untuk pulsar Vela  $\epsilon_{max}$  sebesar  $1.8 \times 10^{-3}$  [4]. Berdasarkan hal ini, maka nilai amplitudo maksimum  $h_{0max}$  pulsar Vela yang dapat dihasilkan sebesar

$$\begin{aligned}
 h_{0max} &= 1.1 \times 10^{-27} \left[ \frac{\epsilon_{max}}{10^{-6}} \right] \\
 &= 1.1 \times 10^{-27} \left[ \frac{1.8 \times 10^{-3}}{10^{-6}} \right] \\
 &= 1.9 \times 10^{-24}.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Mengenai pendeteksian gelombang gravitasi, untuk dapat mengetahui lebih lanjut maka hal ini harus dibahas juga dalam ruang lingkup eksperimen. Diberikan spesifikasi detektor gelombang gravitasi VIRGO yang ditunjukkan pada tabel (5.1).

**Tabel 5.1** Spesifikasi detektor gelombang gravitasi VIRGO [4]

Frekuensi rotasi bintang $\nu_{rot}$ [Hz]	Sensitivitas $\tilde{h}$ [Hz <sup>-1/2</sup> ]	Amplitudo minimum yang dapat dideteksi $h_{0min}$
10	$10^{-21}$	$10^{-25}$
30	$10^{-22}$	$10^{-26}$
100	$3 \times 10^{-23}$	$3 \times 10^{-27}$
1000	$3 \times 10^{-23}$	$3 \times 10^{-27}$

Pada tabel (5.1) terdapat nilai sensitivitas  $\tilde{h}$  VIRGO dan amplitudo minimum  $h_{0min}$  untuk gelombang gravitasi yang dapat dideteksi oleh VIRGO berdasarkan rentang frekuensi rotasi bintang yang diteliti. Berdasarkan data tersebut, dengan mengambil nilai rata-ratanya maka dapat diketahui bahwa nilai amplitudo minimum agar gelombang gravitasi dapat dideteksi haruslah  $h_{0min} \approx 10^{-26}$ . Pada kasus pulsar Vela, nilai eliptisitas minimum untuk dapat menghasilkan gelombang gravitasi yang dapat dideteksi oleh VIRGO dengan amplitudo minimum  $h_{0min} \approx 10^{-26}$  adalah sebesar



$$\begin{aligned}
h_{0_{min}} &= 1.1 \times 10^{-27} \left[ \frac{\epsilon_{min}}{10^{-6}} \right] \\
10^{-26} &= 1.1 \times 10^{-27} \left[ \frac{\epsilon_{min}}{10^{-6}} \right] \\
\epsilon_{min} &= 9.1 \times 10^{-6} \\
&= 5 \times 10^{-3} \epsilon_{max}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Berdasarkan perhitungan dan pendekatan tersebut, maka dapat diketahui pula amplitudo gelombang gravitasi yang dihasilkan oleh beberapa pulsar lain. Pada tabel (5.2) ditunjukkan data perhitungan amplitudo gelombang gravitasi pada beberapa pulsar dengan pendekatan  $I_3 \approx 10^{38} \text{Kg m}^2$ .

**Tabel 5.2** Data amplitudo gelombang gravitasi  $h_0$  pada pulsar [4]

Nama pulsar	Frekuensi rotasi pulsar $\nu_{rot}$ [Hz]	Jarak pulsar ke bumi $R$ [kpc]	Amplitudo gelombang gravitasi pulsar $h_0$
Vela	11	0.5	$1.1 \times 10^{-27} \epsilon_{-6}$
Crab	30	2	$1.9 \times 10^{-27} \epsilon_{-6}$
Geminga	4.2	0.16	$4.7 \times 10^{-28} \epsilon_{-6}$
J0437-4715	174	0.14	$9.1 \times 10^{-25} \epsilon_{-6}$

Sedangkan pada tabel (5.3), ditunjukkan data perhitungan amplitudo gelombang gravitasi pada beberapa pulsar dengan penambahan pendekatan berupa eliptisitas maksimum masing-masing pulsar  $\epsilon_{max}$  dan amplitudo minimum  $h_{0_{min}} \approx 10^{-26}$ .

**Tabel 5.3** Data amplitudo gelombang gravitasi  $h_0$  pada pulsar dengan pendekatan eliptisitas maksimum  $\epsilon_{max}$  dan amplitudo minimum terdeteksi  $h_{0_{min}} \approx 10^{-26}$  [4]

Nama pulsar	Eliptisitas maksimum $\epsilon_{max}$	Amplitudo gelombang gravitasi maksimum $h_{0_{max}}$	Eliptisitas minimum $\epsilon_{min}$ untuk $h_{0_{min}} \approx 10^{-26}$
Vela	$1.8 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-24}$	$9.1 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} \epsilon_{max}$
Crab	$7.5 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-24}$	$5.3 \times 10^{-6} = 7 \times 10^{-3} \epsilon_{max}$
Geminga	$2.3 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-24}$	$2.1 \times 10^{-5} = 9 \times 10^{-3} \epsilon_{max}$
J0437-4715	$2.9 \times 10^{-8}$	$2.6 \times 10^{-26}$	$1.1 \times 10^{-8} = 0.4 \epsilon_{max}$

Berdasarkan kedua tabel tersebut, didapat bahwa keempat pulsar yang terdapat pada kedua tabel menunjukkan nilai amplitudo gelombang gravitasi  $h_0$  yang memadai untuk dideteksi dengan detektor VIRGO selama dilakukan pendekatan  $h_{0_{min}} \approx 10^{-26}$  dan nilai eliptisitasnya  $\epsilon$  mendekati nilai maksimumnya masing-masing.

## 5.2 Kesimpulan

Telah dilakukan kajian pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron dengan beberapa pendekatan, seperti medan gravitasi lemah pada persamaan medan Einstein terlinearisasi dan sifat-sifat fisis pada bintang neutron. Berdasarkan kajian tersebut, dapat disimpulkan bahwa:

- Gelombang gravitasi merupakan salah satu implikasi dari teori relativitas umum Einstein, dan berawal dari persamaan medan Einstein yang telah terlinearisasi.
- Solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi menjadi landasan teori untuk gelombang gravitasi, seperti polarisasi dan pembangkitan gelombang gravitasi.
- Polarisasi gelombang gravitasi akan menghasilkan deviasi geodesik pada ruang-waktu, dimana hal tersebut menjadi prinsip kerja dasar detektor gelombang gravitasi.

- Untuk membangkitkan gelombang gravitasi yang dapat dideteksi, maka sumber dari gelombang tersebut haruslah berasal dari objek yang memiliki massa dan kecepatan rotasi yang besar.
- Bintang neutron adalah bintang berotasi yang merupakan fase akhir dari evolusi bintang utama yang dikenal sebagai salah satu obyek terpadat di alam semesta dan memiliki rotasi yang cepat.
- Pada kasus bintang neutron, untuk membangkitkan gelombang gravitasi maka bintang tersebut haruslah bersifat *non-axisymmetric* (berbentuk agak elips gepat dan tidak berbentuk bola) dan dianggap sebagai benda tegar.
- Frekuensi gelombang gravitasi yang dihasilkan oleh bintang neutron merupakan dua kalinya dari frekuensi rotasi bintang neutron itu sendiri.
- Bintang neutron mampu menghasilkan gelombang gravitasi kontinu (*continuous gravitational waves*) selama bintang tersebut masih tetap berotasi.

### 5.3 Saran

Gelombang gravitasi merupakan suatu topik yang masih memiliki banyak kajian. Setelah dilakukan kajian mengenai pembangkitan gelombang gravitasi pada bintang neutron, hal selanjutnya yang memungkinkan dan menarik untuk dibahas adalah mengenai emisi gelombang gravitasi yang dihasilkan pada bintang neutron.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anugrah, Rinto. 2005. *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- [2] Carrol, S. 2004. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. San Fransisco: Addison-Wesley.
- [3] Frizha, Melly. 2012. *Penentuan Medan Gravitasi Einstein Dalam Ruang Minkowski Menggunakan Simbol Christoffel Jenis I Dan II*. Skripsi. Program Studi S1 Departemen Fisika FMIPA USU, Medan.
- [4] Gourgoulhon, E. dan Bonazzola, S. 1996. "Gravitational waves from isolated neutron stars". *International Conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors*. Pisa, Italia, 19-23 Maret 1996.
- [5] Hidayat, Taufiq. 2010. *Teori Relativitas Einstein: Sebuah Pengantar*. Bandung: Penerbit ITB.
- [6] Irawan, Andika. 2016. *Kajian Ruang-Waktu Kerr-Newman dalam Medan Gravitasi Einstein*. Tugas Akhir. Program Studi S1 Jurusan Fisika FMIPA ITS, Surabaya.
- [7] Kasmudin. 2009. *Sifat-sifat Bintang Neutron Berotasi Lambat*. Tesis. Program Magister Ilmu Fisika FMIPA UI, Depok.
- [8] Mbolosi, Syahreza. 2016. *Pembangkitan Gelombang Gravitasi pada Rotasi Benda Tegar dengan Tiga Sumbu Utama*. Tugas Akhir. Program Studi S1 Jurusan Fisika FMIPA ITS, Surabaya.
- [9] Purwanto, Agus. 2009. *Pengantar Kosmologi*. Surabaya: ITS Press.
- [10] Scuthz, B. 2009. *A First Course in General Relativity*. New York: Cambridge University Press.
- [11] Wospakrik, M. 2008. *Radiasi Gelombang Gravitasi yang Dibangkitkan oleh Sistem Bintang Ganda Kompak Pada Fase Inspiral*. Tugas Akhir. Program Studi S1 Fisika FMIPA ITB, Bandung.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB A

### LAMPIRAN

#### 1.1 Persamaan Geodesik

Penurunan persamaan geodesik berawal dari Lagrangian yang didefinisikan sebagai fungsi dari koordinat dan turunan pertamanya

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right), \quad (1.1)$$

sehingga integral aksinya adalah

$$I = \int_{s_A}^{s_B} \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right) ds. \quad (1.2)$$

Kemudian dilakukan variasi integral aksi yang dinyatakan

$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \delta \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right) ds = 0, \quad (1.3)$$

dengan

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L} \left( x^\mu + \delta x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds} + \delta \frac{dx^\mu}{ds}, s \right) - \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right). \quad (1.4)$$

Suku pertama pada persamaan (1.4) dapat diekspansikan dalam deret Taylor dengan mengambil suku ke-nol dan suku pertamanya, sehingga didapat

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \delta \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right) - \mathcal{L} \left( x^\mu, \frac{dx^\mu}{ds}, s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \frac{d}{ds} \delta x^\mu \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta x^\mu \right] \\
&\quad - \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right] \delta x^\mu. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Persamaan (1.5) dapat dimasukkan ke dalam persamaan (1.3), sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right) \right] \delta x^\mu ds \\
&\quad + \int_{s_A}^{s_B} d \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta x^\mu \right] \\
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right) \right] \delta x^\mu ds \\
&\quad + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \delta x^\mu \right]_{s_A}^{s_B} \\
&= \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)} \right) \right] \delta x^\mu ds, \tag{1.6}
\end{aligned}$$

dimana suku ketiga pada persamaan (1.6) dapat lenyap karena

$$\delta x^\mu(s_A) = \delta x^\mu(s_B) = 0. \tag{1.7}$$

Persamaan (1.6) dapat ditulis sebagai



$$\delta I = \int_{s_A}^{s_B} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) \right] \delta x^\mu ds = 0, \quad (1.8)$$

dimana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Persamaan (1.9) disebut sebagai persamaan *Euler-Lagrange*. Kemudian diberikan persamaan metrik

$$\begin{aligned} dl^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ dl &= (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dl}{ds} &= \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \\ dl &= \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds, \end{aligned} \quad (1.10)$$

dimana panjang kurva stasioner didapat dengan

$$I = l(s) = \int dl = \int \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (1.11)$$

Bila persamaan (1.11) dibandingkan dengan persamaan (1.2), maka akan didapatkan Lagrangian berupa

$$\mathcal{L} = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

Bentuk Lagrangian persamaan (1.12) ini dapat disubstitusikan ke dalam

persamaan (1.9). Suku kedua persamaan (1.9) dengan Lagrangian dari persamaan (1.12) adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)} \frac{\partial \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)}{\partial x^\lambda} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1} \left( g_{\mu\nu} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right\}}_{=0} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \underbrace{\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \right\}}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right), \tag{1.13}
 \end{aligned}$$

dan suku pertama persamaan (1.9) dengan Lagrangian dari persamaan (1.12) adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} &= \frac{\partial}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}}}_{=1} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}_{=0} + g_{\mu\nu} \delta_\lambda^\mu \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \delta_\lambda^\nu \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{g_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{ds}}_{\nu \rightarrow \mu} + g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ g_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right\} \\
&= g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \\
\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\lambda}{ds} \right)} \right) &= \frac{d}{ds} \left( g_{\mu\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \\
&= \frac{dg_{\mu\lambda}}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda} \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right) \\
&= \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \\
&= g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \underbrace{\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds}}_{\nu \rightarrow \mu} \right\} \\
&= g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right\} \\
&= g_{\mu\lambda} \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (1.13) dan (1.14), maka bentuk Lagrangian persamaan (1.12) yang disubstitusikan ke dalam persamaan (1.9) adalah

$$g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0 \\
g^{\rho\lambda} \left\{ g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\lambda,\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right\} &= 0 \\
\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Persamaan (1.15) ini adalah **persamaan geodesik**.

## 1.2 Persamaan Medan Einstein

Penurunan persamaan medan Einstein berawal dari aksi medan gravitasi pada ruang vakum yang dapat ditulis sebagai

$$I_G = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \mathcal{L}_G (g_{\mu\nu}, \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d\Omega, \tag{1.16}$$

dimana bentuk dari  $\mathcal{L}_G$  adalah

$$\mathcal{L}_G = -\frac{c^4}{16\pi G} R. \tag{1.17}$$

Persamaan (1.17) dapat disubstitusikan ke persamaan (1.16), sehingga

$$I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d\Omega. \tag{1.18}$$

Jika dilakukan variasi terhadap  $I_G$ , maka

$$\delta I_G = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \delta \sqrt{-g} R d\Omega, \tag{1.19}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\delta (\sqrt{-g}R) &= \delta (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\
&= (\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Diketahui bahwa variasi terhadap metrik  $g$  adalah

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{1.21}$$

maka

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g} \delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Bila persamaan (1.22) disubstitusikan ke dalam persamaan (1.21), didapat

$$\begin{aligned}
\delta (\sqrt{-g}R) &= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \\
&= -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \\
&= \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}),
\end{aligned} \tag{1.23}$$

dengan

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\delta \left( \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \right) \\
&= g^{\mu\nu}\delta \left( \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right) \\
&\quad + g^{\mu\nu}\delta \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho + g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\
&\quad - g^{\mu\nu}\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}_{\text{suku tambahan} = 0} \\
&= g^{\mu\nu}\delta \underbrace{\left( \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \right)}_{\rho \rightarrow \lambda} \\
&\quad + g^{\mu\nu} \underbrace{\left( \Gamma_{\nu\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right)}_{\rho \rightarrow \gamma} \\
&\quad + \underbrace{g^{\mu\nu}\delta \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\rho}_{\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda} + \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\nu}^\rho}_{\rho \leftrightarrow \nu} \\
&\quad - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\rho}^\rho}_{\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \rho, \rho \rightarrow \lambda} - \underbrace{g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}_{\nu \leftrightarrow \rho} \\
&= g^{\mu\nu}\delta \left( \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \\
&\quad + g^{\mu\nu} \left( \Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \\
&\quad + g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\lambda}^\mu \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^\nu \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
&\quad - g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\nu}^\mu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu}^\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&= g^{\mu\nu}\delta \left( \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \\
&\quad + g^{\mu\nu} \left( \Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) \\
&\quad - \left( -g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\lambda}^\mu - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\lambda}^\nu \right) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
&\quad + \left( -g^{\rho\nu}\Gamma_{\rho\nu}^\mu - g^{\mu\rho}\Gamma_{\rho\nu}^\nu \right) \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Diketahui pula bahwa turunan kovarian tensor metrik bernilai nol, maka

$$\begin{aligned}
D_\lambda g^{\mu\nu} &= \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu g^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\lambda}^\nu g^{\mu\rho} = 0 \\
\partial_\lambda g^{\mu\nu} &= -\Gamma_{\rho\lambda}^\mu g^{\rho\nu} - \Gamma_{\rho\lambda}^\nu g^{\mu\rho}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

dan

$$\begin{aligned}
D_\nu g^{\mu\nu} &= \partial_\nu g^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu g^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\nu g^{\mu\rho} = 0 \\
\partial_\nu g^{\mu\nu} &= -\Gamma_{\rho\nu}^\mu g^{\rho\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\nu g^{\mu\rho}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Persamaan (1.25) dan persamaan (1.26) dapat disubstitusikan ke persamaan (1.24), sehingga didapat

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - g^{\mu\nu} \delta (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad - \partial_\lambda g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\nu g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&\quad + g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&= g^{\mu\nu} \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - g^{\mu\nu} \partial_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad - \partial_\lambda g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \partial_\nu g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\
&\quad + g^{\mu\nu} (\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&= \underbrace{\partial_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}_{\lambda \leftrightarrow \nu} - \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&\quad + \underbrace{\Gamma_{\nu\gamma}^\gamma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)}_{\lambda \leftrightarrow \nu} - \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\
&= \partial_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \\
&\quad + \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma (g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Pada titik ini, didefinisikan persamaan vektor-4 sebagai

$$\omega^\lambda \equiv g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda, \tag{1.28}$$

dan nilai simbol Christoffel

$$\Gamma_{\lambda\gamma}^{\gamma} = \partial_{\lambda} \ln \sqrt{-g}, \quad (1.29)$$

sehingga persamaan (1.28) dan persamaan (1.29) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (1.27). Hasil substitusi tersebut adalah

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda} \omega^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\gamma} \omega^{\lambda} \\ &= \partial_{\lambda} \omega^{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} \ln \sqrt{-g} \omega^{\lambda} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Kemudian disubstitusikan persamaan (1.30) ke dalam persamaan (1.23), sehingga didapat

$$\begin{aligned} \delta (\sqrt{-g} R) &= \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}) \\ &= \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Persamaan (1.31) juga dapat disubstitusikan dengan persamaan (1.19), sehingga didapat

$$\begin{aligned} \delta I_G &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \left\{ \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\partial_{\lambda} (\sqrt{-g} \omega^{\lambda})}_{= 0 \text{ (teorema Gauss)}} \right\} d\Omega \\ &= -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Persamaan (1.32) adalah persamaan aksi medan gravitasi pada ruang



vakum. Sedangkan aksi oleh massa sumber didefinisikan sebagai

$$\delta I_M \equiv \frac{1}{c} \int_{\Omega} \partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) d\Omega, \quad (1.33)$$

dengan

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) &= \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{g g^{\mu\nu} \partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\mu\nu}} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-\sqrt{-g} \sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{1}{2} (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Diketahui bahwa

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M, \quad (1.35)$$

maka

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) &= \frac{1}{2} \left( g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M + 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\gamma\mu} g^{\lambda\nu} T_{\gamma\lambda} \delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\gamma\lambda} g^{\gamma\mu} g^{\lambda\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\gamma\lambda} \delta g^{\gamma\lambda} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Persamaan (1.36) dapat disubstitusikan ke persamaan (1.32), sehingga didapatkan

$$\delta I_M = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{1.37}$$

Persamaan (1.37) merupakan persamaan aksi oleh massa sumber. Setelah didapatkan persamaan aksi medan gravitasi dan aksi massa, maka aksi total dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned}
I &= I_G + I_M \\
\delta I &= \delta I_G + \delta I_M = 0 \\
\delta I_G &= -\delta I_M,
\end{aligned} \tag{1.38}$$

dan dari persamaan (1.32) dan persamaan (1.37), didapatkan

$$\begin{aligned}
\delta I_G &= -\delta I_M \\
-\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d\Omega &= -\frac{1}{2c} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Persamaan (1.39) adalah **persamaan medan Einstein**. Dalam ungkapan tensor campuran, persamaan (1.39) menjadi

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\nu. \quad (1.40)$$

### 1.3 Teori Dasar Gelombang Gravitasi

#### 1.3.1 Persamaan Simbol Cristoffel dan Tensor Kurvatur Riemann pada Medan Gravitasi Lemah

Diberikan persamaan simbol Christoffel sebagai

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_\gamma g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\sigma} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma}). \quad (1.41)$$

Dengan menggunakan tensor metrik ruang-waktu pada persamaan medan gravitasi lemah,

$$g^{\alpha\sigma} = \eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma},$$

maka persamaan simbol Christoffel dapat ditransformasikan sebagai

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = & \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}) (\partial_\gamma (\eta_{\sigma\beta} + h_{\sigma\beta}) \\ & + \partial_\beta (\eta_{\gamma\sigma} + h_{\gamma\sigma}) - \partial_\sigma (\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Jika mengingat kembali bahwa nilai  $h^{\alpha\sigma}$  pada medan gravitasi lemah sangatlah kecil ( $h^{\alpha\sigma} \ll 1$ ), maka komponen  $h^{\alpha\sigma}$  pada komponen  $\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}$  dalam persamaan (1.42) dapat diabaikan.

$$\frac{1}{2}(\eta^{\alpha\sigma} + h^{\alpha\sigma}) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}.$$

Pada komponen berikutnya, didapat bahwa turunan parsial dari metrik minkowski  $\partial_\gamma \eta_{\sigma\beta} = 0$ . Hal ini juga menyebabkan komponen turunan parsial dari metrik minkowski dapat diabaikan.

$$\partial_\gamma (\eta_{\sigma\beta} + h_{\sigma\beta}) = \partial_\gamma h_{\sigma\beta}.$$

Persamaan (1.42) dapat ditulis menjadi

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma} (\partial_{\gamma}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\gamma\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\gamma}). \quad (1.43)$$

Dari persamaan (1.43), akan didapatkan persamaan tensor kurvatur Riemann. Hubungan persamaan tensor kurvatur Riemann dengan simbol Christoffel adalah

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}. \quad (1.44)$$

Jika mengingat bahwa tensor metrik bersifat simetrik,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

maka akan berpengaruh pada sifat simbol Christoffel. Persamaan (1.41) menunjukkan bahwa tensor metrik mempengaruhi simbol Christoffel, sehingga dapat dibuktikan bahwa simbol Christoffel juga bersifat simetrik.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\gamma}g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}g_{\gamma\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\beta\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\gamma}g_{\beta\sigma} + \partial_{\beta}g_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma}g_{\gamma\beta}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\beta}g_{\sigma\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\beta\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\gamma\beta}) \\ &= \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Berdasarkan hal ini, persamaan (1.44) menjadi

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \\ &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + 0 \\ &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Jika persamaan (1.43) disubstitusikan dengan persamaan (1.45), maka didapat

$$\begin{aligned}
R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \\
&= \partial_{\mu}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(\partial_{\nu}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\nu})\right) \\
&\quad - \partial_{\nu}\left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\mu})\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(\partial_{\mu}(\partial_{\nu}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\nu}) \\
&\quad - \partial_{\nu}(\partial_{\mu}h_{\sigma\beta} + \partial_{\beta}h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\beta\mu})). \tag{1.46}
\end{aligned}$$

Persamaan (1.46) dapat disederhanakan menjadi

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\partial_{\beta}h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\partial^{\alpha}h_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\nu}\partial^{\alpha}h_{\beta\mu}). \tag{1.47}$$

Persamaan (1.47) merupakan persamaan **tensor kurvatur Riemann** untuk medan gravitasi lemah.

### 1.3.2 *Lorentz gauge* pada Medan Gravitasi Lemah

Dilakukan pemilihan *gauge* untuk metrik perturbasi, dengan meninjau ulang persamaan *trace-reversed perturbation*

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \\
&= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}), \tag{1.48}
\end{aligned}$$

dan persamaan transformasi *gauge*

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_{\nu}\xi^{\mu} - \partial_{\mu}\xi^{\nu} \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu}\partial_{\nu}\xi^{\rho} - \eta_{\rho\nu}\partial_{\mu}\xi^{\rho}, \tag{1.49}
\end{aligned}$$

dimana  $h_{\mu\nu}^{(old)}$  merupakan metrik perturbasi pada keadaan awal yang didefinisikan berada pada ruang-waktu minkowski, sedangkan  $h_{\mu\nu}^{(new)}$

merupakan metrik perturbasi baru yang sudah ditransformasikan memenuhi syarat-syarat *gauge* untuk menyederhanakan persamaan medan Einstein. Dari persamaan (1.48) dan (1.49), didapat

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(new)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left( \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(new)} \right) \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left( \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(old)} \right) \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left( \eta^{\alpha\beta} \left( h_{\alpha\beta}^{(old)} - \eta_{\sigma\beta} \partial_\alpha \xi^\sigma - \eta_{\sigma\alpha} \partial_\beta \xi^\sigma \right) \right) \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(old)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\beta + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\beta \xi^\alpha. \tag{1.50}
\end{aligned}$$

Diberikan asumsi bahwa indeks  $\alpha = \beta$  pada persamaan (1.50), sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(old)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \xi^\rho - \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} (\partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\gamma + \eta_{\mu\gamma} \partial_\alpha \xi^\alpha). \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Bila kedua ruas pada persamaan (1.51) dikalikan dengan  $\partial_\nu$ , maka

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\nu \eta_{\nu\gamma} (\partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\gamma + \eta_{\mu\gamma} \partial_\alpha \xi^\alpha) \\
&= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \partial_\nu \eta_{\nu\gamma} \partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\nu \eta_{\nu\gamma} \partial_\mu \xi_\gamma + \partial_\nu \eta_{\nu\gamma} \eta_{\mu\gamma} \partial_\alpha \xi^\alpha \\
&= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} \partial_\nu \partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Seperti pada persamaan (1.50), diberi asumsi bahwa indeks  $\alpha = \nu$  pada persamaan (1.52), sehingga

$$\begin{aligned}
 \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} \partial_\nu \partial_\gamma \xi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \xi_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \xi^\nu \\
 &= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} \partial_\nu \partial_\gamma \xi_\mu + 0 \\
 &= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \eta_{\nu\gamma} \partial_\nu \partial_\gamma \xi_\mu \\
 &= \partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \square \xi_\mu.
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Persamaan (1.53) merupakan persamaan yang dapat menentukan pemilihan *gauge*. Untuk menyederhanakan persamaan medan Einstein sesederhana mungkin, dipilih

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} = 0, \tag{1.54}$$

maka

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} = \square \xi_\mu,$$

dimana *gauge* ini disebut sebagai **Lorentz gauge**.

### 1.3.3 Persamaan Tensor dan Skalar Ricci pada Medan Gravitasi Lemah

Diberikan persamaan mengenai hubungan antara tensor kurvatur Riemann dengan tensor Ricci sebagai

$$R_{\beta\nu} = R^\mu_{\beta\mu\nu}, \tag{1.55}$$

dimana persamaan tensor kurvatur Riemann adalah

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta h^\alpha_\nu - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h^\alpha_\mu + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\beta\mu}).$$

Berdasarkan persamaan (1.55), persamaan tensor Ricci didapatkan bila indeks  $\alpha$  dan  $\mu$  pada persamaan tensor kurvatur Riemann dikontraksikan, sehingga didapat

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \partial_\mu \partial^\mu h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h_\mu^\mu + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}). \quad (1.56)$$

Operator d'Alembert  $\square$  dapat didefinisikan sebagai

$$\eta^{\sigma\mu} \partial_\mu \partial_\sigma = \partial_\alpha \partial^\alpha = \square. \quad (1.57)$$

dan nilai skalar metrik perturbasi

$$\eta^{\sigma\mu} h_{\mu\sigma} = h_\alpha^\alpha = h. \quad (1.58)$$

Dengan menggunakan operator d'Alembert dan skalar metrik perturbasi, persamaan (1.56) menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\beta h_\nu^\mu - \square h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\beta h + \partial_\nu \partial^\mu h_{\beta\mu}). \quad (1.59)$$

Persamaan (1.59) dapat disederhanakan menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_\beta \left( \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) + \partial_\nu \left( \partial^\mu h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_\beta h \right) - \square h_{\beta\nu} \right). \quad (1.60)$$

Pada titik ini diperkenalkan persamaan *trace-reversed perturbation*, suatu persamaan yang digunakan untuk menyederhanakan metrik perturbasi

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (1.61)$$

dimana persamaan (1.61) juga dapat ditulis sebagai

$$\bar{h}_\nu^\mu = h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu h.$$

Persamaan (1.60) dapat disederhanakan jika ditinjau beberapa komponennya dan ditransformasikan ke dalam bentuk *trace-reversed perturbation*, seperti



$$\begin{aligned}
\partial_\beta \left( \partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) &= \partial_\beta \partial_\mu \left( h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu h \right) \\
&= \partial_\beta \partial_\mu (\bar{h}_\nu^\mu) \\
&= \partial_\beta \partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Hal ini juga berlaku dengan komponen  $\partial_\nu (\partial^\mu h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \partial_\beta h)$ , sehingga persamaan (3.37) menjadi

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\beta \partial_\mu \bar{h}_\nu^\mu + \partial_\nu \partial^\mu \bar{h}_{\beta\mu} - \square h_{\beta\nu}). \tag{1.63}$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa persamaan medan gravitasi lemah bersifat invarian terhadap transformasi *gauge*. Transformasi *gauge* merupakan suatu transformasi yang dapat menyederhanakan suatu sistem apabila sistem tersebut invarian terhadapnya, dengan cara melakukan pemilihan *gauge* untuk sistem tersebut. Dengan begitu, persamaan medan Einstein dapat disederhanakan dengan transformasi *gauge* melalui pendekatan medan gravitasi lemah. Dipilih *gauge*

$$\partial_\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0,$$

dimana *gauge* ini disebut sebagai **Lorentz gauge** (Penurunan lebih lanjut ada pada lampiran (1.3.2)). Dengan begitu, persamaan (1.63) menjadi

$$R_{\beta\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu}. \tag{1.64}$$

Skalar Ricci  $R$  juga dapat dibangun dengan

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}, \tag{1.65}$$

dimana dengan memakai pendekatan medan gravitasi lemah, didapat

$$\begin{aligned}
R &= (\eta^{\beta\nu} + h^{\beta\nu}) R_{\beta\nu} \\
&= \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} + h^{\beta\nu} R_{\beta\nu}.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Mengingat bahwa  $h^{\beta\nu} \ll 1$ , maka

$$\begin{aligned}
 R &= \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \\
 &= \eta^{\beta\nu} \left( -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \square \eta^{\beta\nu} h_{\beta\nu} \\
 &= -\frac{1}{2} \square h.
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Persamaan (1.64) dan (1.67) merupakan persamaan **tensor dan skalar Ricci** pada medan gravitasi lemah.

### 1.3.4 Linearisasi Persamaan Medan Einstein

Diberikan persamaan medan Einstein sebagai

$$R_{\beta\nu} - \frac{1}{2} g_{\beta\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}.$$

Dengan menggunakan tensor Ricci pada medan gravitasi lemah

$$R_{\beta\nu} = -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu}$$

dan skalar Ricci pada medan gravitasi lemah

$$\begin{aligned}
 R &= \eta^{\beta\nu} R_{\beta\nu} \\
 &= \eta^{\beta\nu} \left( -\frac{1}{2} \square h_{\beta\nu} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \square \eta^{\beta\nu} h_{\beta\nu} \\
 &= -\frac{1}{2} \square h,
 \end{aligned}$$

maka persamaan medan Einstein terlinearisasi dapat ditulis

$$\begin{aligned}
R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\nu} \\
-\frac{1}{2}\square h_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\left(-\frac{1}{2}\square h\right) &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\nu} \\
-\frac{1}{2}\square h_{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\beta\nu}\square h &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\nu} \\
-\frac{1}{2}\square\left(h_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}h\right) &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\nu} \\
-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\beta\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\beta\nu} \\
\square\bar{h}_{\beta\nu} &= -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\beta\nu}. \quad (1.68)
\end{aligned}$$

Operator d'Alembert dapat ditulis sebagai

$$\square = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.69)$$

maka persamaan (1.68) dapat pula ditulis sebagai

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\bar{h}_{\beta\nu} = -\frac{16\pi G}{c^2}T_{\beta\nu}. \quad (1.70)$$

Persamaan(1.68) dan (1.70) merupakan **persamaan medan Einstein terlinearisasi**.

### 1.3.5 Persamaan Deviasi Geodesik

Dari persamaan geodesik (Penurunan terdapat pada lampiran (1.1))

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0, \quad (1.71)$$

dimana juga dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 x^a}{ds^2} = -\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds}, \quad (1.72)$$

dapat dilakukan prinsip variasi untuk mendapatkan persamaan deviasi geodesik. Berawal dengan memakai transformasi infinitesimal/koordinat kecil, persamaan geodesik dapat ditransformasikan menjadi

$$\frac{d^2 (x^a + \epsilon^a)}{ds^2} + \Gamma_{bc}^{a'} \frac{d(x^b + \epsilon^b)}{ds} \frac{d(x^c + \epsilon^c)}{ds} = 0 \quad (1.73)$$

Komponen  $\Gamma_{bc}^{a'}$  pada persamaan (1.73) merupakan simbol Christoffel  $\Gamma_{bc}^a$  yang mengandung  $\epsilon$ , dan dapat diekspansikan dan diambil dua suku utamanya

$$\Gamma_{bc}^{a'} = \Gamma_{bc}^a + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d + \dots \quad (1.74)$$

Dengan memakai persamaan (1.74), persamaan (1.73) dapat diekspansikan menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \left( \Gamma_{bc}^a + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \right) \\ &\quad \left( \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \right) \\ &= \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} \\ &\quad + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \\ &= \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + 0 + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{bc}^a \frac{d\epsilon^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds}. \quad (1.75)$$

Diberikan asumsi bahwa indeks  $b = c$ , sehingga persamaan (1.75) menjadi

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} \\ & + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Kemudian dilakukan pengurangan terhadap persamaan (1.76) dengan (1.71), dan didapatkan

$$\frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0, \quad (1.77)$$

dimana

$$\frac{d^2 \epsilon^a}{ds^2} + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} = -\frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds}. \quad (1.78)$$

Lalu, didefinisikan prinsip turunan kovarian sebagai

$$\frac{DA^a}{Dx^b} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} + \Gamma_{bc}^a A^c, \quad (1.79)$$

dan diberikan

$$A^a = \frac{dx^b}{ds} \epsilon^a. \quad (1.80)$$

Bila persamaan (1.78) dimasukkan ke dalam persamaan (1.79), didapat

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dx^b} \left( \frac{dx^b}{ds} \epsilon^a \right) &= \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{dx^b}{ds} \epsilon^a \right) + \Gamma_{bc}^a \left( \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c \right) \\ \frac{D\epsilon^a}{Ds} &= \frac{\partial \epsilon^a}{\partial s} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Persamaan (1.81) juga dapat didefinisikan sebagai

$$\frac{D\epsilon^a}{Ds} = \frac{\partial\epsilon^a}{\partial s} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c = Z^a, \quad (1.82)$$

dimana

$$V^a = \frac{dx^b}{ds} Z^a \quad (1.83)$$

dan

$$\frac{D^2\epsilon^a}{Ds^2} = \frac{DV^a}{Dx^b} = W^a. \quad (1.84)$$

Berdasarkan persamaan (1.82) dan (1.83), persamaan (1.84) dapat diekspansikan sebagai

$$\begin{aligned} W^a = \frac{DV^a}{Dx^b} &= \frac{\partial V^a}{\partial x^b} + \Gamma_{bc}^a V^c = \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{dx^b}{ds} Z^a \right) \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \left( \frac{dx^b}{ds} Z^c \right) \\ W^a = \frac{D}{Dx^b} \left( \frac{dx^b}{ds} Z^a \right) &= \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{dx^b}{ds} Z^a \right) + \Gamma_{bc}^a \left( \frac{dx^b}{ds} Z^c \right) \\ W^a = \frac{DZ^a}{Ds} &= \frac{\partial Z^a}{\partial s} + \Gamma_{bc}^a \left( \frac{dx^b}{ds} Z^c \right). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Persamaan (1.82) dapat dimasukkan ke dalam persamaan (1.85) sehingga didapat

$$\begin{aligned} W^a &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial\epsilon^a}{\partial s} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c \right) + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \left( \frac{\partial\epsilon^c}{\partial s} + \Gamma_{ef}^c \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \epsilon^a + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c + \Gamma_{bc}^a \frac{d^2 x^b}{ds^2} \epsilon^c \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ef}^c \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Kemudian dimasukkan juga persamaan (1.72) kedalam persamaan (1.86), dan didapatkan

$$\begin{aligned}
 W^a &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \epsilon^a + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c + \Gamma_{bc}^a \left( -\Gamma_{gh}^b \frac{dx^g}{ds} \frac{dx^h}{ds} \right) \epsilon^c \\
 &\quad + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} \\
 &\quad + \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ef}^c \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \epsilon^a + \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c - \Gamma_{bc}^a \Gamma_{gh}^b \frac{dx^g}{ds} \frac{dx^h}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ef}^c \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f. \tag{1.87}
 \end{aligned}$$

Komponen  $\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c$  pada persamaan (1.87) dapat disubstitusikan dengan

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c = \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^e}{ds} \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c, \tag{1.88}$$

sehingga persamaan (1.87) menjadi

$$\begin{aligned}
 W^a &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \epsilon^a + 2\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{d\epsilon^c}{ds} + \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^e}{ds} \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad - \Gamma_{bc}^a \Gamma_{gh}^b \frac{dx^g}{ds} \frac{dx^h}{ds} \epsilon^c + \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ef}^c \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f. \tag{1.89}
 \end{aligned}$$

Dua suku utama pada persamaan (1.89) dapat disubstitusikan dengan persamaan (1.78), sehingga persamaan (1.89) menjadi

$$\begin{aligned}
 W^a &= -\frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} \epsilon^d \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} + \frac{\partial}{\partial x^e} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^e}{ds} \frac{dx^b}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad - \Gamma_{bc}^a \Gamma_{gh}^b \frac{dx^g}{ds} \frac{dx^h}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad + \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ef}^c \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^e}{ds} \epsilon^f. \tag{1.90}
 \end{aligned}$$

Dengan menyamakan indeks pada persamaan (1.90), didapat

$$\begin{aligned}
 W^a &= -\frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c + \frac{\partial}{\partial x^d} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad - \Gamma_{fc}^a \Gamma_{bd}^f \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c \\
 &\quad + \Gamma_{df}^a \Gamma_{bc}^f \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c \\
 W^a &= \left( -\frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} + \frac{\partial}{\partial x^d} \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{fc}^a \Gamma_{bd}^f + \Gamma_{df}^a \Gamma_{bc}^f \right) \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c \\
 W^a &= -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c \\
 \frac{D^2 \epsilon^a}{Ds^2} &= -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c.
 \end{aligned} \tag{1.91}$$

Persamaan (1.91) merupakan **persamaan deviasi geodesik**.

### 1.3.6 Polarisasi Gelombang Gravitasi

Dari persamaan deviasi geodesik

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Ds^2} = -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^d}{ds} \epsilon^c,$$

dapat diturunkan persamaan polarisasi gelombang gravitasi. Komponen  $ds$  merupakan elemen garis pada ruang-waktu yang ditinjau (Dalam hal ini ditinjau ruang-waktu Minkowski) dan  $\epsilon^a$  merupakan vektor yang menghubungkan kedua objek atau partikel uji. Jika hal ini ditinjau pada objek atau partikel uji dalam keadaan diam, maka persamaan deviasi geodesik tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Dt^2} = -R_{bcd}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^d}{dt} \epsilon^c, \tag{1.92}$$

dimana komponen  $s \equiv x^0 \equiv t$  dan  $\epsilon^a$  mempunyai komponen  $(0, \epsilon, 0, 0)$ . Persamaan (1.92) dapat ditulis juga sebagai



$$\frac{D^2 \epsilon^a}{Dt^2} = -R_{bcd}^a U^b U^d \epsilon^c, \quad (1.93)$$

dimana  $U^b$  yang merupakan vektor kecepatan-4 pada kedua partikel, pada kasus partikel uji dalam keadaan diam memiliki komponen  $(1, 0, 0, 0)$ . Persamaan (1.93) juga dapat disederhanakan sebagai

$$\frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} = -R_{0c0}^a U^0 U^0 \epsilon^c, \quad (1.94)$$

dimana komponen tensor Riemann pada persamaan (1.94) dapat dijabarkan menjadi

$$R_{0c0}^a = \frac{1}{2} (\partial_c \partial_0 h_0^a - \partial_0 \partial^a h_{00} - \partial_0 \partial_0 h_c^a + \partial_0 \partial^a h_{0c}). \quad (1.95)$$

Mengingat kembali keadaan *Transverse-Traceless gauge*, maka komponen  $h_0^a$ ,  $h_{00}$ , dan  $h_{0c}$  pada persamaan (1.95) dapat diabaikan, sehingga persamaan (1.94) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_c^a \epsilon^c \\ \frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_c^a \epsilon^c \\ \frac{\partial^2 \epsilon^a}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_c^{a(TT)} \epsilon^c. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Solusi dari persamaan (1.96) adalah

$$\epsilon^a = \left( \delta_{ac} + \frac{1}{2} h_c^{a(TT)} \right) \epsilon_0^c. \quad (1.97)$$

Komponen  $h_c^{a(TT)}$  dapat dijabarkan dengan meninjau ulang solusi dari

persamaan medan Einstein terlinearisasi, yaitu

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (1.98)$$

dan komponen vektor  $k_\sigma$  pada persamaan (1.98) dapat dijabarkan menjadi

$$k_\sigma = \left( \frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3 \right), \quad (1.99)$$

dimana komponen  $k^1, k^2$ , dan  $k^3$  merupakan komponen vektor koordinat ruang. Bila nilai  $c \equiv 1$ , maka persamaan (1.99) dapat ditulis sebagai

$$k_\sigma = (\omega, k^1, k^2, k^3). \quad (1.100)$$

Bila ditinjau gelombang menjalar terhadap sumbu- $z$  pada koordinat kartesian, maka persamaan vektor gelombang (1.100) menjadi

$$k_\sigma = (\omega, 0, 0, \omega). \quad (1.101)$$

Komponen  $x^\sigma$  pada persamaan (1.98) merupakan komponen metrik ruang-waktu yang ditinjau. Dalam hal ini ditinjau metrik ruang-waktu Minkowski ( $c \equiv 1$ ), sehingga

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Persamaan (1.98) dengan penjabaran pada sumbu- $z$  dapat diubah menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} e^{-i\omega(t-z)}. \quad (1.102)$$

Persamaan (1.102) dapat diubah ke dalam bentuk trigonometri, mengingat

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

dan

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

sehingga persamaan (1.102) menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} (\cos(\omega(t-z)) - i \sin(\omega(t-z))). \quad (1.103)$$

Dengan mengambil komponen *real* pada persamaan (1.103), didapat

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = A_{\beta\nu}^{(TT)} (\cos(\omega(t-z))). \quad (1.104)$$

Mengingat bahwa  $A_{\beta\nu}^{(TT)}$  memiliki 2 komponen bebas, maka persamaan (1.104) dapat ditulis menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = \left( a A_{11}^{(TT)} + b A_{12}^{(TT)} \right) (\cos(\omega(t-z))). \quad (1.105)$$

Persamaan (1.105) dapat disederhanakan menjadi

$$\bar{h}_{\beta\nu}^{(TT)} = \bar{h}_{11}^{(TT)} + \bar{h}_{12}^{(TT)}, \quad (1.106)$$

dimana

$$\bar{h}_{11}^{(TT)} = a A_{11}^{(TT)} (\cos(\omega(t-z)))$$

dan

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

serta

$$\bar{h}_{12}^{(TT)} = b A_{12}^{(TT)} (\cos(\omega(t-z)))$$

dan

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Persamaan (1.97) dapat dibangun bentuk eksplisitnya dengan meninjau arah propagasi gelombang menuju sumbu- $z$  dan persamaan (1.106), sehingga didapat

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x + \frac{1}{2} \left( h_{11}^{(TT)} \epsilon_0^x + h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^y \right), \quad (1.107)$$

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y + \frac{1}{2} \left( h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^x - h_{11}^{(TT)} \epsilon_0^y \right), \quad (1.108)$$

$$\epsilon^z = \epsilon_0^z. \quad (1.109)$$

Komponen  $\epsilon_0^x$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $x$ ,  $\epsilon_0^y$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $y$ , dan  $\epsilon_0^z$  merupakan posisi awal partikel uji terhadap sumbu- $z$ . Namun karena sebelumnya telah dibahas bahwa hal ini ditinjau pada sumbu- $z$ , maka  $\epsilon_0^z = 0$ . Dengan begitu, persamaan (1.109) dapat diabaikan.

Mengingat bahwa  $A_{\beta\nu}^{(TT)}$  memiliki 2 komponen bebas yang merepresentasikan polarisasi gelombang gravitasi, maka persamaan (1.107) dan (1.108) dapat dipisah menjadi

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (1.110)$$

dan

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (1.111)$$

dimana komponen  $h_{12}^{(TT)} = 0$ , serta

$$\epsilon^x = \epsilon_0^x + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^y \quad (1.112)$$

dan

$$\epsilon^y = \epsilon_0^y + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \epsilon_0^x \quad (1.113)$$

dimana komponen  $h_{11}^{(TT)} = 0$ . Persamaan (1.110) dan (1.111) merepresentasikan polarisasi gelombang milik komponen  $h_{11}^{(TT)}$ , sedangkan persamaan (1.112) dan (1.113) merepresentasikan polarisasi gelombang milik komponen  $h_{12}^{(TT)}$ .

Pada titik ini, diberikan asumsi bahwa lintasan partikel uji untuk polarisasi gelombang gravitasi sebelum gelombang tersebut datang berbentuk lingkaran pada bidang sumbu- $x$  dan sumbu- $y$  (karena arah gelombang pada sumbu- $z$ ). Diberikan  $r_0$  sebagai jari-jari lingkaran tersebut. Dengan asumsi ini, didapat

$$\epsilon_0^x = r_0 \cos \theta \quad (1.114)$$

dan

$$\epsilon_0^y = r_0 \sin \theta. \quad (1.115)$$

Jika persamaan (1.114) dan (1.115) dimasukkan ke persamaan (1.110), (1.111), (1.112), dan (1.113), maka akan didapat

$$\epsilon^x = r_0 \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (1.116)$$

dan

$$\epsilon^y = r_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \quad (1.117)$$

untuk komponen  $h_{11}^{(TT)}$ , serta

$$\epsilon^x = r_0 \cos \theta + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} r_0 \sin \theta \quad (1.118)$$

dan

$$\epsilon^y = r_0 \sin \theta + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} r_0 \cos \theta \quad (1.119)$$

untuk komponen  $h_{12}^{(TT)}$ . Bila ditinjau persamaan (1.116) dan (1.117), maka didapat

$$\epsilon^x = \cos \theta \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right) \quad (1.120)$$

dan

$$\epsilon^y = \sin \theta \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right). \quad (1.121)$$

Pada titik ini, diberi pemisalan bahwa

$$a_+ = \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right) \quad (1.122)$$

dan

$$b_+ = \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{11}^{(TT)} \right) \right), \quad (1.123)$$

sehingga persamaan (1.120) dan (1.121) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}\epsilon^x &= \cos \theta a_+ \\ (\epsilon^x)^2 &= (\cos \theta)^2 (a_+)^2 \\ \left(\frac{\epsilon^x}{a_+}\right)^2 &= \cos^2 \theta,\end{aligned}\tag{1.124}$$

dan

$$\begin{aligned}\epsilon^y &= \sin \theta b_+ \\ (\epsilon^y)^2 &= (\sin \theta)^2 (b_+)^2 \\ \left(\frac{\epsilon^y}{b_+}\right)^2 &= \sin^2 \theta.\end{aligned}\tag{1.125}$$

Bila persamaan (1.124) dan (1.125) dijumlahkan, maka akan didapat

$$\begin{aligned}\left(\frac{\epsilon^x}{a_+}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon^y}{b_+}\right)^2 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \left(\frac{\epsilon^x}{a_+}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon^y}{b_+}\right)^2 &= 1.\end{aligned}\tag{1.126}$$

Persamaan (1.126) merupakan persamaan elips, sehingga hal ini menunjukkan bahwa lintasan partikel uji saat dilewati gelombang gravitasi berubah dari bentuk lingkaran menjadi elips. Kedua persamaan tersebut dapat ditulis juga sebagai

$$a_+ = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\omega(t - z)) \right)\tag{1.127}$$

dan

$$b_+ = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\omega(t - z)) \right).\tag{1.128}$$

Untuk menyederhanakan persamaan, didefinisikan  $\omega(t-z) \equiv \phi$ , sehingga didapat

$$a_+ = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\phi) \right) \quad (1.129)$$

dan

$$b_+ = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{11}^{(TT)} \cos(\phi) \right). \quad (1.130)$$

Berdasarkan persamaan (1.129) dan (1.130), dapat divariasikan nilai  $(\phi)$  sehingga dapat diketahui polarisasi gelombang gravitasi berbentuk (+) atau bisa disebut sebagai **polarisasi plus**.

Setelah meninjau komponen (1.116) dan (1.117), maka komponen yang akan ditinjau selanjutnya adalah komponen (1.118) dan (1.119). Sebelum meninjau komponen-komponen tersebut, dapat dilakukan transformasi rotasi terhadap matriks  $a$  pada  $\bar{h}_{11}^{(TT)}$  pada bidang  $x - y$

$$a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bila  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , maka  $a' = b$ . Dengan begitu, diketahui bahwa  $a'$  dan  $b$  terhubung oleh rotasi dengan sudut  $\frac{\pi}{4}$ . Untuk meninjau persamaan (1.118)



dan (1.119), komponen  $\epsilon^x$  dan  $\epsilon^y$  dapat ditransformasikan ke koordinat baru  $\epsilon^{x'}$  dan  $\epsilon^{y'}$  terlebih dahulu dengan  $\theta = \frac{\pi}{4}$  sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \epsilon^{x'} \\ \epsilon^{y'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \epsilon^{x'} \\ \epsilon^{y'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Berdasarkan matriks (1.3.6), persamaan (1.118) dan (1.119) dapat ditulis

$$\epsilon^{x'} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 (\sin \theta + \cos \theta) \left( 1 + h_{12}^{(TT)} \right) \quad (1.132)$$

dan

$$\epsilon^{y'} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 (\sin \theta - \cos \theta) \left( 1 - h_{12}^{(TT)} \right). \quad (1.133)$$

Jika diberi pemisalan yang sama seperti (1.122) dan (1.123), bahwa

$$a_{\times} = \left( r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \right) \right) \quad (1.134)$$

dan

$$b_{\times} = \left( r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} h_{12}^{(TT)} \right) \right), \quad (1.135)$$

maka persamaan (1.132) dan (1.133) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \epsilon^{x'} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta) a_{\times} \\ \left( \epsilon^{x'} \right)^2 &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 (\sin \theta + \cos \theta)^2 (a_{\times})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\epsilon^{x'}}{a_{\times}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right) (\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\
\left(\frac{\epsilon^{x'}}{a_{\times}}\right)^2 &= \frac{1}{2} + \sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{1.136}$$

dan

$$\begin{aligned}
\epsilon^{y'} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta - \cos \theta) b_{\times} \\
(\epsilon^{y'})^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\sin \theta - \cos \theta)^2 (b_{\times})^2 \\
\left(\frac{\epsilon^{y'}}{b_{\times}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right) (\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\
\left(\frac{\epsilon^{y'}}{b_{\times}}\right)^2 &= \frac{1}{2} - \sin \theta \cos \theta.
\end{aligned} \tag{1.137}$$

Bila persamaan (1.136) dan (1.137) dijumlahkan, maka akan didapat

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\epsilon^{x'}}{a_{\times}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon^{y'}}{b_{\times}}\right)^2 &= \frac{1}{2} + \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} - \sin \theta \cos \theta \\
\left(\frac{\epsilon^{x'}}{a_{\times}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon^{y'}}{b_{\times}}\right)^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{1.138}$$

Persamaan (1.138) mirip dengan persamaan (1.126), sehingga persamaan ini juga merupakan persamaan elips. Berdasarkan hal ini, persamaan (1.134) dan (1.135) juga dapat ditulis sebagai

$$a_{\times} = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\omega(t - z)) \right) \tag{1.139}$$

dan

$$b_{\times} = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\omega(t-z)) \right). \quad (1.140)$$

Untuk menyederhanakan persamaan, didefinisikan  $\omega(t-z) \equiv \phi$ , sehingga didapat

$$a_{\times} = r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\phi) \right) \quad (1.141)$$

dan

$$b_{\times} = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} A_{12}^{(TT)} \cos(\phi) \right). \quad (1.142)$$

Berdasarkan persamaan (1.141) dan (1.142), dapat divariasikan nilai  $(\phi)$  sehingga dapat diketahui polarisasi gelombang gravitasi berbentuk  $(\times)$  atau bisa disebut sebagai **polarisasi cross**.

### 1.3.7 Pembangkitan Gelombang Gravitasi

Persamaan pembangkitan gelombang gravitasi dapat ditentukan melalui fungsi Green dan transformasi Fourier yang diberikan pada persamaan medan Einstein terlinearisasi. Diberikan persamaan fungsi Green pada operator d'Alembert

$$\square \mathcal{G}(x; x') = -4\pi \delta^3(x - x') \delta(t) \quad (1.143)$$

dimana

$$R = |x - x'|, \quad (1.144)$$

sehingga persamaan (1.143) dapat disederhanakan menjadi

$$\square \mathcal{G}(R, t) = -4\pi \delta^3(R) \delta(t). \quad (1.145)$$

Kemudian, diberikan pula transformasi Fourier untuk fungsi Green,

$$\mathcal{G}(R, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.146)$$

dan

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.147)$$

sehingga jika persamaan (1.146) dan (1.147) disubstitusikan ke dalam persamaan (1.145), akan didapat

$$\begin{aligned} \square \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) &= -4\pi \delta^3(x - x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &= -4\pi \delta^3(x - x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta^3(x - x') e^{-i\omega t} d\omega \\ (\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) &= -\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta^3(x - x'). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Diketahui bahwa

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi \delta^3(x), \quad (1.149)$$

sehingga persamaan (1.148) menjadi

$$(\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} \right)$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2) \mathcal{G}(R, \omega) &= (\nabla^2 + k^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \\
\mathcal{G}_{\pm}(R, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\pm ikr}}{r}.
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Dengan substitusi yang ada pada persamaan (1.150), maka persamaan (1.146) akan menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\pm}(R, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{\pm}(R, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\pm ikr}}{R} e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t \pm ikr} d\omega.
\end{aligned} \tag{1.151}$$

Diketahui bahwa  $k = \frac{\omega}{c}$ , sehingga persamaan (1.151) menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\pm}(R, t) &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t \mp \frac{R}{c})} d\omega \\
&= \frac{1}{R} \delta\left(t \mp \frac{R}{c}\right).
\end{aligned} \tag{1.152}$$

Komponen  $R$  pada persamaan (1.152) dapat dikembalikan ke bentuk semula seperti pada persamaan (1.144), sehingga didapat

$$\mathcal{G}_{\pm}(x; x') = \frac{1}{|x - x'|} \delta\left(t \mp \frac{|x - x'|}{c}\right). \tag{1.153}$$

Persamaan (1.153) merupakan persamaan yang mengandung dua fungsi Green, yaitu fungsi Green *retarded* ( $\mathcal{G}_+$ ) dan fungsi Green *advanced* ( $\mathcal{G}_-$ ). Bila ditinjau fungsi Green *retarded*, didapat

$$\mathcal{G}_+(x; x') = \frac{1}{|x - x'|} \delta\left(t - \frac{|x - x'|}{c}\right) \quad (1.154)$$

dimana dalam kasus gelombang, ditinjau fungsi gelombang *retarded* karena fungsi tersebut mewakili penjararan gelombang yang berjalan dari masa lalu ke masa kini (sekarang). Mengingat kembali persamaan medan Einstein terlinearisasi,

$$\square \bar{h}_{\beta\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu},$$

dengan menganalogikannya sebagai persamaan gelombang dengan distribusi materi seperti pada kasus medan elektromagnetik,

$$\square \Psi = -4\pi f(x'),$$

maka solusi persamaan dengan operator d'Alembert dapat ditemukan dengan mengintegalkannya dengan fungsi Green. Solusi persamaan gelombang dengan distribusi materi adalah

$$\Psi = \int \mathcal{G}(x; x') f(x') d^3x'. \quad (1.155)$$

Pada kasus medan Einstein terlinearisasi,

$$\Psi = \bar{h}_{\beta\nu}$$

dan

$$\begin{aligned} -4\pi f(x') d^3x' &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}(x') d^3x' \\ f(x') d^3x' &= \frac{4\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}(x') d^3x', \end{aligned}$$

sehingga solusi dari persamaan medan Einstein terlinearisasi menurut fungsi Green adalah

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\beta\nu} &= -\frac{1}{4\pi} \int G(x; x') \left( -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\beta\nu}(x') \right) d^3 x' \\ &= \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\beta\nu}(x', (t - \frac{R}{c}))}{R} d^3 x'.\end{aligned}\quad (1.156)$$

### 1.3.8 Persamaan Kuadropol

Persamaan kuadropol dapat diturunkan dari solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi menurut fungsi Green

$$\bar{h}_{\beta\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\beta\nu}(x', (t - \frac{R}{c}))}{R} d^3 x',$$

dengan asumsi bahwa ruang-waktu yang ditinjau adalah ruang-waktu datar dengan tidak adanya pengaruh gravitasi, didapat persamaan tensor momentum-energinya

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} &= -\frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k}\end{aligned}\quad (1.157)$$

dimana  $\mu = 0, 1, 2, 3$  dan  $k = 1, 2, 3$ . Jika kedua ruas pada persamaan (1.157) diintegrasikan terhadap volume dari suatu sumber medan gravitasi, didapat

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} d^3 x = - \int_V \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} d^3 x. \quad (1.158)$$

Berdasarkan teorema Gauss, integral  $T^{\mu k}$  terhadap volume  $V$  sebanding

dengan fluks  $T^{\mu k}$  yang melewati suatu permukaan  $S$  yang menutupi volume tersebut

$$\int_V \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} d^3x = \int_S T^{\mu k} dS_k. \quad (1.159)$$

Namun diketahui bahwa

$$\int_S T^{\mu k} dS_k = 0, \quad (1.160)$$

sehingga persamaan (1.158) menjadi

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} d^3x = 0. \quad (1.161)$$

Berdasarkan persamaan (1.161), didapat bahwa

$$\int_V T^{\mu 0} d^3x = \text{constant},$$

sehingga

$$\bar{h}^{\mu 0} = \text{constant}. \quad (1.162)$$

Mengingat bahwa persamaan kuadrupol merupakan persamaan yang berhubungan dengan momen kuadrupol massa yang bergantung pada komponen waktu, maka berdasarkan persamaan (1.162), dapat ditulis

$$\bar{h}^{\mu 0}(t, r) = \bar{h}_{\mu 0}(t, r) = 0, \quad (1.163)$$

dimana kondisi ini secara otomatis akan terpenuhi ketika tensor metrik  $bar{h}^{\mu 0}(t, r)$  bertransformasi ke *Transverse-Traceless gauge*.



Pada titik ini, digunakan teorema Tensor-Virial dengan meninjau kembali persamaan (1.157),

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{n0}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{ni}}{\partial x^i}, \quad (1.164)$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan  $x^k$  dan diintegrasikan terhadap volume, didapat

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{n0} x^k d^3x &= - \int_V \frac{\partial T^{ni}}{\partial x^i} x^k d^3x \\ &= - \left[ \int_V \frac{(\partial T^{ni} x^k)}{\partial x^i} d^3x - \int_V T^{ni} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} d^3x \right]. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Diketahui bahwa

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^i} = \delta_i^k,$$

dan dengan memakai kondisi persamaan (1.159) dan (1.160), didapat

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{n0} x^k d^3x &= - \int_S (T^{ni} x^k) dS_i + \int_V T^{nk} dx^3 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{n0} x^k d^3x &= 0 + \int_V T^{nk} dx^3 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{n0} x^k d^3x &= \int_V T^{nk} dx^3. \end{aligned} \quad (1.166)$$

$T^{nk}$  merupakan tensor simetrik,

$$T^{nk} = T^{kn},$$

sehingga persamaan (1.166) juga dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (T^{n0} x^k + T^{k0} x^n) d^3 x = \int_V T^{nk} dx^3. \quad (1.167)$$

Jika diberi kasus komponen  $n = 0$  pada persamaan (1.164), maka didapat

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i}. \quad (1.168)$$

Dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (1.168) dengan  $x^k x^n$  dan diintegrasikan terhadap  $V$ , didapat

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} x^k x^n d^3 x &= - \int_V \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} x^k x^n d^3 x \\ &= - \left[ \int_V \frac{(\partial T^{0i} x^k x^n)}{\partial x^i} d^3 x \right. \\ &\quad \left. - \int_V \left( T^{0i} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} x^n + T^{0i} x^k \frac{\partial x^n}{\partial x^i} \right) d^3 x \right] \\ &= - \int_S (T^{0i} x^k x^n) dS_i + \int_V (T^{0k} x^n + T^{0n} x^k) d^3 x. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Jika mengingat persamaan (1.160), persamaan (1.169) dapat ditulis menjadi

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} x^k x^n d^3 x = \int_V (T^{0k} x^n + T^{0n} x^k) d^3 x. \quad (1.170)$$

Bila persamaan (1.170) diturunkan terhadap komponen  $x_0$  pada tensor metrik ruang-waktu datar, maka didapat

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (T^{0k} x^n + T^{0n} x^k) d^3x. \quad (1.171)$$

Persamaan (1.171) dapat disubstitusikan dengan persamaan (1.167), sehingga menghasilkan

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x = 2 \int_V T^{kn} d^3x. \quad (1.172)$$

Sisi kiri pada persamaan (1.172) merupakan turunan orde dua **tensor momen kuadropol** ( $q^{kn}$ ) terhadap waktu, dimana

$$q^{kn}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x, \quad (1.173)$$

sehingga persamaan (1.171) menjadi

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} q^{kn}(t) = \int_V T^{kn} d^3x. \quad (1.174)$$

Solusi persamaan medan Einstein terlinearisasi dalam medan menjadi

$$\bar{h}^{ik}(t, R) = \frac{2G}{c^4} \left[ \frac{d^2}{dt^2} q^{ik} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right]. \quad (1.175)$$

Persamaan (1.175) merupakan persamaan pembangkitan gelombang gravitasi dengan formula kuadropol. Mengingat bahwa persamaan (1.175) belum dalam kondisi *Transverse-Traceless gauge*, maka dapat diaplikasikan persamaan proyektor *Transverse-Traceless gauge* pada tensor momen kuadropol pada persamaan (1.175), sehingga didapat

$$\bar{h}_{ik}^{(TT)}(t, R) = \frac{2G}{c^4} \left[ \frac{d^2}{dt^2} Q_{ik}^{(TT)} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (1.176)$$

dimana

$$Q_{jk}^{(TT)} = \mathcal{P}_{jkmn} q_{mn}. \quad (1.177)$$

$Q_{jk}$  merupakan momen kuadropol tereduksi dengan bentuk persamaan

$$Q_{jk} \equiv q_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr q \quad (1.178)$$

dimana *trace* dari  $Q_{jk}$  bernilai nol,

$$\delta^{jk} Q_{jk} = 0,$$

sehingga persamaan (1.177) juga dapat ditulis menjadi

$$Q_{jk}^{(TT)} = \mathcal{P}_{jkmn} q_{mn} = \mathcal{P}_{jkmn} Q_{mn}. \quad (1.179)$$

## 1.4 Pembangkitan Gelombang Gravitasi pada Bintang Neutron

### 1.4.1 Momen Inersia Elips

Persamaan momen inersia elips dalam koordinat tiga dimensi kartesian adalah

$$I_{ij} = \int_V \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dx dy dz, \quad (1.180)$$

dimana

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0, (i \neq j) \\ &= 1, (i = j) \end{aligned}$$

dan

$$r = x^2 + y^2 + z^2.$$

Jika koordinat diacu pada sumbu- $z$ , momen inersianya adalah

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_V \rho (r^2 \delta_{33} - x_3 x_3) dx dy dz \\ I_{33} &= \int_V \rho (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dx dy dz \\ I_{33} &= \int_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Pada koordinat tiga dimensi, suatu elips memiliki tiga komponen jari-jari, yaitu  $a$  pada koordinat  $x$ ,  $b$  pada koordinat  $y$ , dan  $c$  pada koordinat  $z$ . Berdasarkan hal ini, ketiganya dapat ditransformasikan ke dalam koordinat baru

$$x' \equiv \frac{x}{a}, \quad (1.182)$$

$$y' \equiv \frac{y}{b}, \quad (1.183)$$

$$z' \equiv \frac{z}{c}, \quad (1.184)$$

$$(1.185)$$

dimana hubungan ketiganya adalah

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \quad (1.186)$$

Persamaan (1.182), (1.183), dan (1.184) dapat dimasukkan ke dalam persamaan (1.181) dan menghasilkan

$$I_{33} = \int_{V'} \rho \left( (ax')^2 + (by')^2 \right) \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x', y', z')} \right| dx' dy' dz',$$

$$(1.187)$$

dimana

$$\left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x', y', z')} \right| = abc \quad (1.188)$$

adalah Jacobian. Kemudian persamaan (1.187) ditransformasikan ke dalam koordinat bola, dan didapatkan

$$\begin{aligned} I_{33} &= abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^2 r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + b^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi) r^2 \sin \phi d\phi d\theta dr \\ &= abc\rho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) r^4 \sin^3 \phi d\phi d\theta dr \\ &= \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (1.189)$$

Diketahui bahwa

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (1.190)$$

dan

$$V = \frac{4}{3} \pi abc, \quad (1.191)$$

sehingga dengan memasukkan persamaan (1.191) ke persamaan (1.190), akan didapatkan

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi abc}. \quad (1.192)$$

Bila momen inersia ditinjau pada masing-masing sumbu, didapat

$$I_{11} = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2), \quad (1.193)$$

$$I_{22} = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2), \quad (1.194)$$

$$I_{33} = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2). \quad (1.195)$$

### 1.4.2 Gelombang Gravitasi pada Bintang Berotasi

Persamaan pembangkitan gelombang gravitasi pada kasus bintang berotasi bisa didapatkan dengan meninjau ulang persamaan tensor momen kuadrupol

$$q^{kn}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^k x^n d^3x, \quad (1.196)$$

dimana  $T^{00}$  merupakan komponen densitas energi,

$$T^{00} = \rho c^2, \quad (1.197)$$

sehingga

$$q^{kn}(t) = \int_V \rho x^k x^n d^3x. \quad (1.198)$$

Jika diambil nilai *trace* dari  $q^{kn}$ , maka berdasarkan persamaan (1.198) akan didapat

$$Trq = \int_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \quad (1.199)$$

Selain meninjau tensor momen kuadrupol, ditinjau kembali tensor momen inersia suatu sistem, dalam hal ini sistem yang ditinjau adalah sistem elips

$$I_{ij} = \int_V \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dx dy dz. \quad (1.200)$$

Jika diungkapkan dalam bentuk matriks, didapat

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int_V \rho \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dx dy dz \\ &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.201)$$

Jika persamaan (1.200) dihubungkan dengan (1.198) dan (1.199), maka akan didapat persamaan relasi

$$q_{ij} = -I_{ij} + \delta_{ij} Tr q. \quad (1.202)$$

Persamaan matrik (1.201) dapat disederhanakan dengan mengabaikan komponen yang bukan diagonal utamanya, dan dapat ditulis

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \frac{4}{15} \pi \rho abc \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Sama seperti tensor momen kuadropol  $q^{kn}$ , jika diambil nilai *trace* dari  $I_{ij}$  maka akan didapat

$$Tr I = \int_V \rho (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dx dy dz$$



$$= 2 \int_V \rho (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad (1.204)$$

dimana jika dihubungkan persamaan (1.199) dan (1.204), maka akan didapat

$$Tr I = 2 Tr q. \quad (1.205)$$

Mengingat kembali persamaan tensor momen kuadropol tereduksi

$$Q_{jk} \equiv q_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr q,$$

bila disubstitusikan dengan persamaan (1.202) dan (1.205), maka akan didapat

$$\begin{aligned} Q_{jk} &= q_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr q \\ &= -I_{ij} + \delta_{ij} Tr q - \frac{1}{3} \delta_{jk} Tr q \\ &= -I_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} Tr q \\ &= -I_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} Tr I. \end{aligned} \quad (1.206)$$

Diketahui bahwa  $Tr I = \text{constant}$ , sehingga persamaan (1.206) menjadi

$$Q_{jk} = -I_{ij} + \text{constant}. \quad (1.207)$$

Bila diberikan pemisalan bahwa terdapat suatu objek elips yang berotasi terhadap salah satu sumbunya, maka dapat ditentukan kerangka koordinat inersianya sebagai

$$x'_i = R_{ij} x_j, \quad (1.208)$$

dimana  $x_i$  merupakan kerangka koordinat awal,  $x'_i$  merupakan kerangka

koordinat inersia saat berotasi, dan  $R_{ij}$  merupakan matriks rotasi. Jika sumbu yang dipilih merupakan sumbu- $z$  dengan kecepatan angular  $(0, 0, \Omega)$ , maka matriks rotasi dapat ditulis sebagai

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.209)$$

atau

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.210)$$

Mengingat kembali persamaan tensor momen inersia (1.203), maka dengan persamaan (1.208) didapat

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}. \quad (1.211)$$

Jika objek elips berotasi terhadap sumbu- $z$  dengan kecepatan angular  $(0, 0, \Omega)$ , maka

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= R_{ik} R_{jl} I_{kl} = (R I R^T)_{ij} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \cos \varphi & I_1 \sin \varphi & 0 \\ -I_2 \sin \varphi & I_2 \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos^2 \varphi (I_2 - I_1) & 0 \\ -\sin \varphi \cos^2 \varphi (I_2 - I_1) & I_1 \cos^2 \varphi + I_2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.212)$$

Pada titik ini, dengan memakai prinsip trigonometri

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= 1, \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi &= \cos 2\varphi, \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi &= \sin 2\varphi,\end{aligned}$$

dan persamaan (1.207), maka persamaan (1.212) dapat disederhanakan menjadi

$$Q_{ij} = \frac{I_2 - I_1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + constant. \quad (1.213)$$

Terdapat selisih kecil antara  $I_2$  dan  $I_1$ , yang dapat didefinisikan sebagai parameter yang tidak berdimensi (*dimensionless*) yang disebut sebagai eliptisitas (*ellipticity*) atau kepepatan (*oblateless*) yang disimbolkan  $\epsilon$ . Bila ditinjau pada sumbu- $z$ , didefinisikan parameter eliptisitas  $\epsilon$  sebagai

$$\epsilon \equiv \frac{a - b}{\frac{1}{2}(a + b)} \quad (1.214)$$

dengan

$$a - b = \frac{1}{2}\epsilon(a + b). \quad (1.215)$$

Berdasarkan persamaan (1.203),

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(b^2 + c^2), \\ I_2 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + c^2), \\ I_3 &= \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + b^2),\end{aligned}$$

maka persamaan (1.215) dapat diubah bentuk menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{I_2 - I_1}{I_3} &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{(a + b)(a - b)}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2}.
 \end{aligned} \tag{1.216}$$

Jika persamaan (1.215) dikuadratkan, didapat

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &= \left( \frac{1}{2} (a + b) \right)^2 \epsilon^2 \\
 (a - b)^2 &= O(\epsilon^2) = a^2 + b^2 - 2ab \\
 2ab &= a^2 + b^2 + O(\epsilon^2),
 \end{aligned} \tag{1.217}$$

dan persamaan (1.216) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{I_2 - I_1}{I_3} &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + O(\epsilon^2)}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{2(a^2 + b^2) + O(\epsilon^2)}{a^2 + b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{O(\epsilon^2)}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \epsilon + O(\epsilon^3) \\
 &\approx \epsilon.
 \end{aligned} \tag{1.218}$$

Dengan menggunakan persamaan (1.218), maka persamaan (1.213) menjadi

$$Q_{ij} = \frac{\epsilon I_3}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{constant}. \quad (1.219)$$

Berdasarkan penyederhanaan persamaan pada (1.209) dan (1.210), didapat

$$\varphi = \Omega t,$$

dengan

$$\Omega = 2\pi\nu_{rot} = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.220)$$

$\Omega$  merupakan kecepatan angular rotasi objek,  $\nu_{rot}$  merupakan frekuensi rotasi, dan  $T$  merupakan periode rotasi. Namun berdasarkan persamaan (1.219), didapat bahwa besarnya frekuensi gelombang gravitasi dua kali lebih besar dibandingkan dengan frekuensi rotasi bintang

$$\nu_{GW} = 2\nu_{rot}. \quad (1.221)$$

Berdasarkan persamaan (1.219), maka solusi persamaan medan Einstein dengan tensor momen kuadripol dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ik}^{(TT)}(t, R) &= \frac{2G}{c^4 R} \left[ \frac{d^2}{dt^2} Q_{ik}^{(TT)} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ \bar{h}_{jk}^{(TT)}(t, R) &= \frac{2G}{c^4 R} \mathcal{P}_{jklm} \left[ \frac{d^2}{dt^2} Q_{lm} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ &= h_0 \left[ \mathcal{P} \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi_{ret} & -\sin 2\varphi_{ret} & 0 \\ -\sin 2\varphi_{ret} & \cos 2\varphi_{ret} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (1.222)$$

dimana

$$\varphi_{ret} = \Omega \left( t - \frac{R}{c} \right) \quad (1.223)$$

dan

$$h_0 = \frac{4G\Omega^2}{c^4 R} I_3 \epsilon. \quad (1.224)$$

$h_0$  merupakan amplitudo regangan gelombang gravitasi yang dihasilkan suatu objek. Pada persamaan (1.224), amplitudo regangan gelombang gravitasi dihasilkan oleh suatu objek berotasi yang berbentuk elips. Berdasarkan persamaan (1.220), maka persamaan (1.224) dapat disederhanakan lagi menjadi

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4 R T^2} I_3 \epsilon \quad (1.225)$$

atau

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G (\nu_{rot})^2}{c^4 R} I_3 \epsilon. \quad (1.226)$$

## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Sumedang, 13 Januari 1996, dengan nama lengkap Naufal Aulia Adam dan dikenal dengan nama panggilan Adam. Penulis merupakan anak pertama dari 2 bersaudara. Penulis telah menempuh beberapa pendidikan formal, yaitu di TK 'Aisyiyah Bustanul Athfal 27 Jakarta Timur, SD Muhammadiyah 03 Jakarta Timur, SMPN 07 Jakarta Timur, dan SMAN 31 Jakarta Timur. Setelah lulus dari SMAN 31 Jakarta Timur pada tahun 2013, Penulis mengikuti SBMPTN dan diterima di Departemen Fisika FMIPA-ITS pada tahun 2013 dan terdaftar dengan NRP 1113100097. Penulis tertarik terhadap bidang Astrofisika dan Kosmologi, dan mengambil Bidang Studi Fisika Teori dan Filsafat Alam di Departemen Fisika FMIPA-ITS. Penulis sempat aktif di beberapa organisasi mahasiswa, seperti Unit Kegiatan Mahasiswa ITS Astronomy Club (UKM IAC) dan Lembaga Dakwah Jurusan Forum Studi Islam Fisika ITS (LDJ FOSIF ITS). Penulis dapat dihubungi melalui email [naufal.auliadam@gmail.com](mailto:naufal.auliadam@gmail.com).